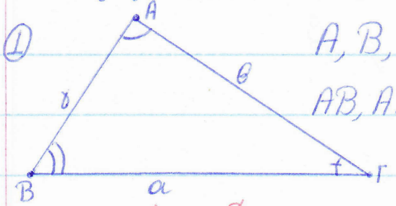
A] Εισαγωγικά

①



Α, Β, Γ κορυφες

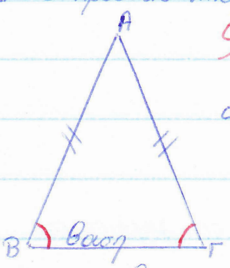
ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ πλευρες

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{Γ}$ γωνιες (προσοχη: με διαφ σημαδι αν δεν γνωριζω πως ειναι ισες)

↳ επειδη η απεναντι κορυφη του ειναι η Α

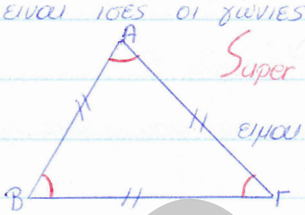
② Ειδη τριγωνων

1) Ως προς τις πλευρες του



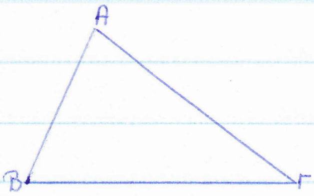
ισοσκελές (2 πλευρες ισες)

Super προσοχη: Οταν εχω ισοσκελες τριγωνο ειμαι υποχρεωμενος να σημειωσω οτι ειναι ισες οι γωνιες της βασης



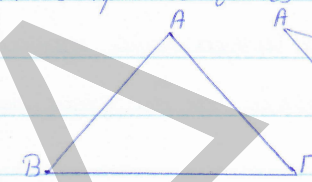
ισοπλευρο (3 πλευρες ισες)

Super προσοχη: Οταν εχω ενα ισοπλευρο τριγωνο ειμαι υποχρεωμενος να σημειωσω οτι ειναι ισες ολες του οι γωνιες (θα μαθουμε οτι η καθε μια γωνια του ειναι 60°)

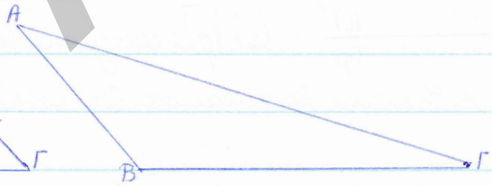


σκαληνο (εχει και τις 3 πλευρες του ανισες)

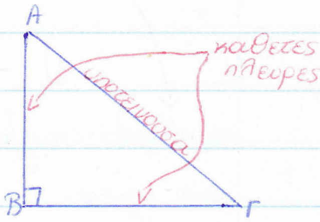
2) Ως προς τις γωνιες του



οξυγωνιο (εχει και τις 3 γωνιες του οξειες)

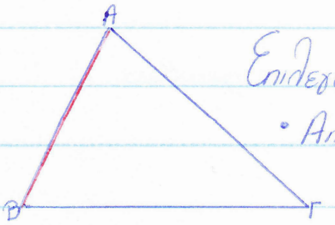


αμβλυγωνιο (εχει μια γωνια αμβλεια)



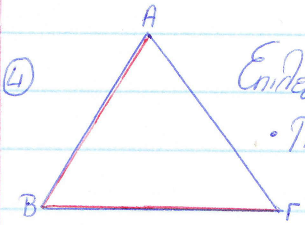
ορθογωνιο (μια γωνια ορθη)

③



Επιλεγω πχ την ΑΒ

- Απεναντι γωνια = Γ
- Προσκειμενες γωνιες = $\hat{A}, \hat{B}$ (αυτες που ακουμπανε)

④ 

Επιλέγω δύο πλευρές π.χ. τις ΑΒ, ΒΓ

• Περιεχόμενη τους γωνία είναι η $\hat{B}$

Β] Α' Λυκείου

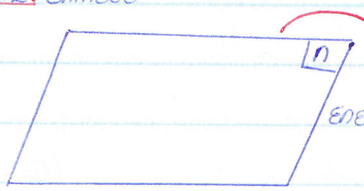
1ο κεφάλαιο: Εκτός Ύλης

2ο κεφάλαιο: Βασικά γεωμετρικά σχήματα

§2.1 - §2.8 : διάβασμα από το βιβλίο

§2.1 •A σημείο Α

§2.2 Επίπεδο



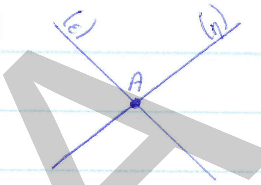
Επίπεδο Π

επεκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις μεριές του

§2.3

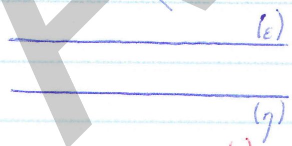
ευθεία (ε) ή ευθεία xx'

Σημειώσεις: 1) Μια ευθεία αποτελείται από άπειρα σημεία

2) 

(ε), (η): τεμνόμενες

Α: σημείο τομής τους

3) 

(ε)//(η) παράλληλες: δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

4) 

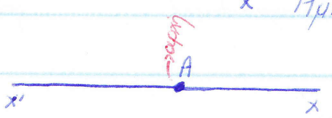
(ε), (η): ταυτίζονται (άπειρα κοινά σημεία)

παράλληλες ονομάζονται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

§2.4 Ημιευθεία

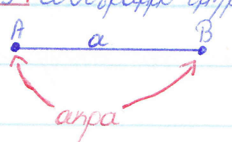
Ημιευθεία Ax

Σημείωση:



Ax, Ax': αντικείμενες ημιευθείες

§2.5 Ευθύγραμμο τμήμα



ευθ. τμήμα ΑΒ ή α

Super Σημειωσεις: 1) A ——— Γ — B το Γ ονομαζεται εσωτερικό σημειο του AB ενω τα A, B λεμε οτι ειναι εκατερωθεν του Γ (απο την μια και απο την αλλη μερια)

2) Να σχεδιασετε μια ευθεια (ε) και ενα σημειο A πανω σε αυτην. Τελος παρτε δυο σημεια B, Γ πανω στην (ε) που να βρισκονται προς το ιδιο μερος του A

επιλεγουμε τυχαια να τα τοποθετησουμε δεξια του

3) A Γ ——— B τα AΓ, ΓB ονομαζονται διαδοχικα

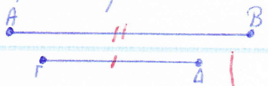
§2.6 Εκτος Υλης

§2.7

AM = MB   AΓ < ΓB

§2.8 Πραξεις με ευθυγραμμα τμηματα

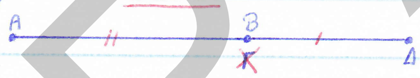
A] Προσθεση



Πρεπει να γινουν διαδοχικα, αν δεν ειναι

Ζητω το AB+ΓΔ ⟶ AB+ΓΔ = AB+BΔ = AΔ

το καινουριο ευθ. τμημα που δημιουργειται

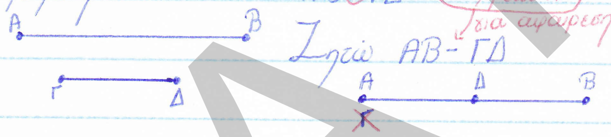


εγινε B επειδη αποφασισαμε να κρατησουμε αυτο αντι για το Γ

B] Αφαιρεση

AB ⊖ ΓΔ υποχρεωτικο για αφαιρεση

Ζητω AB − ΓΔ



Τοποθετω το ΓΔ εσωτερικα του AB ωστε το A να ταυτιστει με το Γ ή το B με το Δ

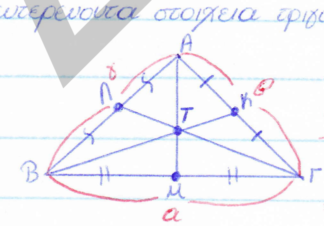
AB − ΓΔ = AB − AΔ = ΔB

σβηνω το AΔ

3ο κεφαλαιο: Τριγωνα

§3.1 Βλεπε A] Εισαγωγικα

• Δευτερευοντα στοιχεια τριγωνων

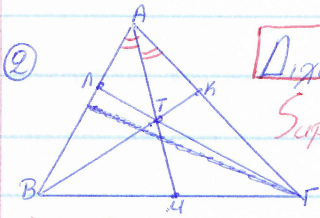
① 

Διαμεσος AM, BK, ΓΛ: διαμεσοι   T: βαρυκεντρο ή κ. βαρους

Super Σημειωσεις: 1) Και οι τρεις διαμεσοι ενος τριγωνου περνουν παντα απο το ιδιο σημειο, το οποιο ονομαζεται βαρυκεντρο ή κεντρο βαρους του τριγωνου.

2) Οι διαμεσοι ενος τριγωνου συμβολιζονται πιο απλα ετσι: $AM = \mu_\alpha$ $BK = \mu_\beta$ $ΓΛ = \mu_\gamma$

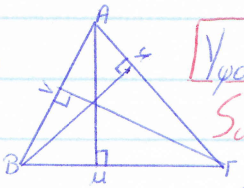
↳ αναλογα στην πλευρα που ακουμπαει

② 

Διχοτομος ΑΜ, ΒΚ, ΓΛ: διχοτομοι Ι = εγκεντρο

Super Σημειωσεις: 1) Και οι τρεις διχοτομοι ενος τριγωνου παιρνουν παντα απο το ιδιο σημειο, το οποιο ονομαζεται εγκεντρο του τριγωνου

2) Οι διχοτομοι συμβολιζονται πιο απλα ετσι: $AM = \delta_\alpha$ $BK = \delta_\beta$ $\Gamma\Lambda = \delta_\gamma$

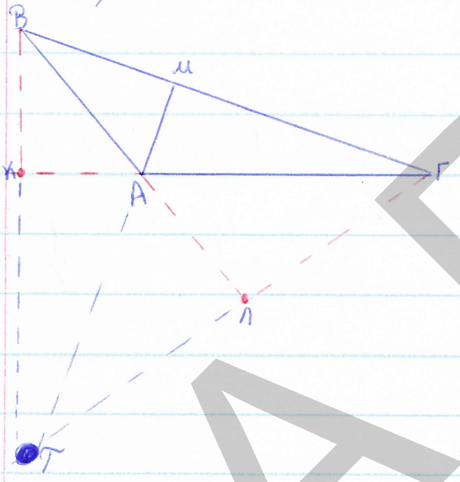
③ 

Υψος ΑΜ, ΒΚ, ΓΛ: υψη

Super Σημειωσεις: 1) Και τα τρια υψη ενος τριγωνου παιρνουν παντα απο το ιδιο σημειο, το οποιο ονομαζεται ορθοκεντρο

2) Τα υψη ενος τριγωνου συμβολιζονται πιο απλα ετσι: $AM = \upsilon_\alpha$ $BK = \upsilon_\beta$ $\Gamma\Lambda = \upsilon_\gamma$

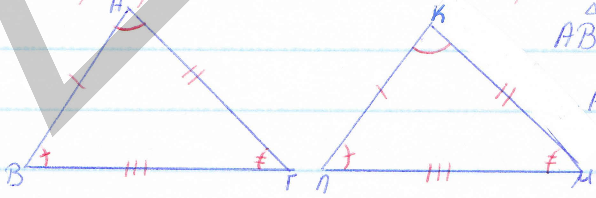
3) Προσοχη οταν το τριγωνο ειναι αμβλυγωνιο. Υπαρχει δυσκολια στον σχεδιασμο των υψων:



§3.2 Κριτηρια ισοτητας τριγωνων + **§3.3** + **§3.4**

• Ορισμος: Δυο τριγωνα λεγονται ισα οταν εχουν τις πλευρες τους ισες μια προς μια και τις αντιστοιχες τους γωνιες επισης ισες μια προς μια

↳ δηλαδη να ειναι και στα δυο τριγωνα αναμεσα απο τις ιδιες ισες πλευρες



$\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{K\Lambda M}$ γιατι:

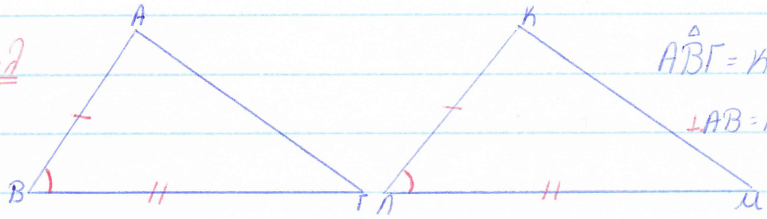
$AB = K\Lambda$, $A\Gamma = KM$, $B\Gamma = \Lambda M$

$\hat{A} = \hat{K}$, $\hat{B} = \hat{\Lambda}$, $\hat{\Gamma} = \hat{M}$

• 1ο κριτηριο ισοτητας τριγωνων (ΠΓΠ)

Δυο τριγωνα ειναι ισα οταν εχουν δυο πλευρες ισες μια προς μια και τις περιεχομενες τους γωνιες επισης ισες

Δηλ



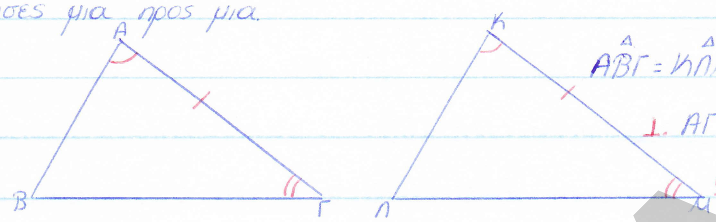
$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΚΛΜ}$ γιατί:

1. ΑΒ=ΚΛ
2. ΒΓ=ΛΜ
3. $\hat{Β} = \hat{Λ}$

• 2ο κρητιριο ισοτητας τριγωνων (ΓΠΓ)

Δυο τριγωνα ειναι ισα οταν εχουν μια πλευρα ιση και τις προσκειμενες τους γωνιες επίσης ισες μια προς μια.

Δηλ



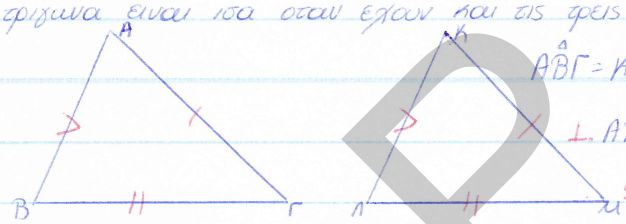
$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΚΛΜ}$ γιατί:

1. ΑΓ=ΚΜ
2. $\hat{Α} = \hat{Κ}$
3. $\hat{Γ} = \hat{Μ}$

• 3ο κρητιριο ισοτητας τριγωνων (ΠΠΠ)

Δυο τριγωνα ειναι ισα οταν εχουν και τις τρεις πλευρες τους ισες μια προς μια

Δηλ



$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΚΛΜ}$ γιατί:

1. ΑΒ=ΚΛ
2. ΑΓ=ΚΜ
3. ΒΓ=ΛΜ

Super Σημειώσεις:

1) Οι αποδειξεις των παραπανω κρητιριων ειναι εκτος υλης

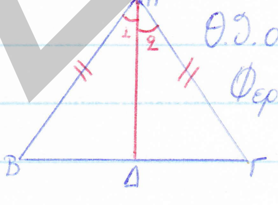
2) Θεωρημα ονομαζεται μια προταση η οποια εχει αποδειξη

3) Πορισμα ειναι μια προταση η οποια πηγαζει(προκειπτει)(ευκολα) απο ενα Θεωρημα. Δυστυχως πολλα πορισματα θελουν και αυτα αποδειξη

πχ Πορισμα Ι σελίδα 42

Σε καθε ισοσκελες τριγωνο οι προσκειμενες στην βαση γωνιες ειναι ισες

Αποδειξη:



Θ.Δ.ο. $\hat{Β} = \hat{Γ}$

Φερνω την διχοτομο ΑΔ

Ειναι $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ γιατί:

1. ΑΒ=ΑΓ ($\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκ)
2. ΑΔ κοινη
3. $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (ΑΔ διχοτομος)

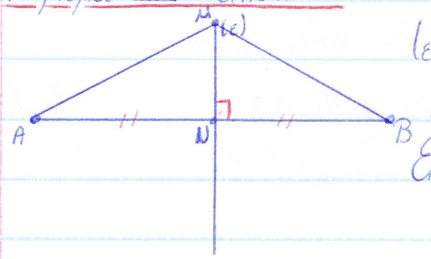
Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ισα, δηλαδη $\hat{Β} = \hat{Γ}$

Πορισμα Ι σελιδα 42

Η διχοτομος σε ισοσκελες τριγωνο (διχοτομος απο την κορυφη) ειναι υψος και διαμεσος. Απο το παραπανω (προηγουμενο) πορισμα θα εχουν και $ΒΔ=ΔΓ$, αρα ΑΔ διαμεσος, και $\hat{Δ}_1=\hat{Δ}_2=90°$, αρα ΑΔ υψος

Πορισμα ΙΙ σελιδα 42: βιβλιο

Πορισμα ΙΙΙ σελιδα 42



(ε) μεσοκαθετος του ΑΒ

ν.δ.ο. $ΜΑ=ΜΒ$

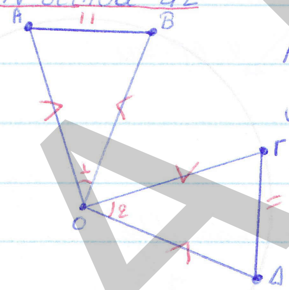
Ειναι $Α\hat{Μ}Ν=Β\hat{Μ}Ν$: 1. $ΑΝ=ΝΒ$ ((ε) μεσοκακαθετος)

2. ΜΝ κοινη

3. $\hat{Ν}_1=\hat{Ν}_2=90°$ ((ε) μεσοκαθετος)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ιδα, δηλαδη $ΜΑ=ΜΒ$

Πορισμα IV σελιδα 42



$\overset{\frown}{ΑΒ}=\overset{\frown}{ΓΔ}$

νδο $ΑΒ=ΓΔ$

Φερνω τις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ

Ειναι $Ο\hat{Α}Β=Ο\hat{Γ}Δ$ γιατι: 1. $ΟΑ=ΟΓ$ (ακτινες)

2. $ΟΒ=ΟΔ$ (ακτινες)

3. $\hat{Ο}_1=\hat{Ο}_2$ (ειναι επικεντρες που βαινουν σε ισα τοξα)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ισα, δηλαδη $ΑΒ=ΓΔ$

Πορισμα 1, σελιδα 45: Βλεπε βιβλιο

Πορισμα 2, σελιδα 45: Βλεπε βιβλιο

Πορισμα 3, σελιδα 46: Βλεπε βιβλιο

Καταλαβαινω οτι ειμαι στην κατηγορια αυτη οταν μου ζητουν:

1) νδο δυο τριγωνα ειναι ισα

2) νδο πλευρα=πλευρα

3) νδο γωνια=γωνια

4) νδο ενα τριγωνο ει

Δουλευω ετσι:

Για το 1) Αρκει να δειξω οτι ισχυει ενα απο τα γνωστα κριτηρια της Θεωρίας

Για το 2) Βρισκω δυο τριγωνα που να εχουν πλευρες τις ζητουμενες και προσπαθω να τα βγαλω ισα συμφωνα με το 1)

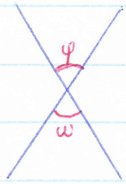
• αν τα καταφερω τοτε γραφω οτι: "Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ισα δηλαδη:" και γραφουμε τις δυο ζητουμενες πλευρες

• αν δεν τα καταφερω, και αυτο θα συμβαινει οταν "εμφανιστικά" τα δυο αυτα τριγωνα δεν ειναι ισα, τοτε βρισκω δυο αλλα τριγωνα που να ειναι ισα με αυτα που εχω εντοπισει. Αφου γραφω και αποδειξω τις δυο αυτες ισοτητες τριγωνων, ευκολα προκυπτει το ζητουμενο.

Για το 3) Ομοια οπως για το 2), αλλα εδω μιλαμε για γωνιες

Για το 4) Αρκει να δειξω οτι εχει δυο πλευρες ισες ή δυο γωνιες ισες, οποτε δουλευω συμφωνα με το 2) ή το 3) αντιστοιχα

Super Σημειωσεις: 1) δεν ξεχνω οτι



$\hat{\varphi}=\hat{\omega}$ ως κατακορυφην

2) δεν ξεχνω οτι

Ειναι $\hat{x}=\hat{y}$ (υποθεση)

Αρα $\hat{\varphi}=\hat{\omega}$ ως παραπληρωματικες των ισων γωνιων $\hat{x},\hat{y}$

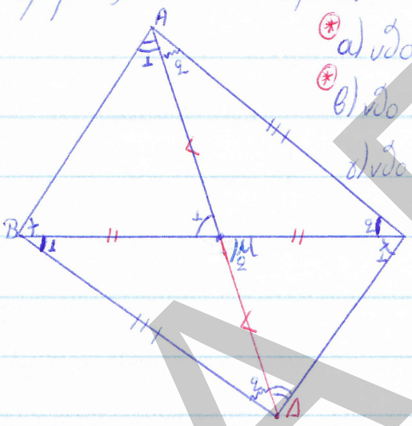
3) Οταν ακολουθει υποερωτημα, τοτε (συμβουλη Δαρα) μετα την ισοτητα που θα εχω κανει θα γραφω οτι: "Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ισα δηλαδη:" και θα γραφω τις ισοτητες των υπολοιπων τριων. Καποιο απο αυτα θα χρειαστει στο επομενο

υποερωτημα

4) Υπαρχει περιπτωση να μου λειπει καποιο στοιχειο σε μια ισοτητα τριγωνων. Τοτε βρισκω απο μονος μου δυο αλλα τριγωνα που να εχουν ~~[illegible]~~ τις πλευρες ή τις γωνιες που μου λειπουν και προσπαθω να τα βγαλω ισα. Αφου γραψω το: "Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα δηλαδη..." παιρνω αυτο που χρειαζομαι

Εφαρμογες:

1) Ασκηση 3, σελιδα 48 (εμπεδ)



(*) α) νδο $A\hat{B}M = M\hat{\Gamma}\Delta$

(*) β) νδο $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$

γ) νδο $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$

α) Είναι $A\hat{B}M = M\hat{\Gamma}\Delta$ γιατι:
1. $BM = M\Gamma$ (AM = διαμεσος)
2. $AM = M\Delta$ (υποθεση)
3. $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφη)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα δηλαδη: $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$, $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}_1$

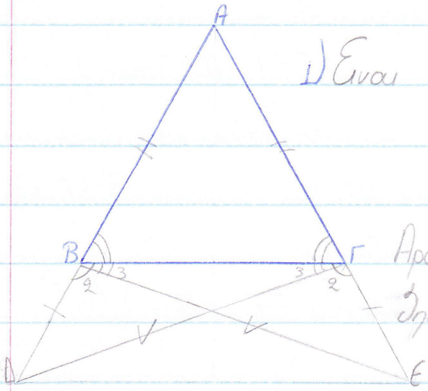
β) Είναι $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$ γιατι:
1. $AM = M\Delta$ (υποθ.)
2. $BM = M\Gamma$ (AM = διαμεσος)
3. $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$ (κατακορυφη)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα δηλαδη: $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2$, $A\Gamma = B\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$

γ) Είναι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$ γιατι:
1. $B\Gamma$ κοινη
2. $AB = \Gamma\Delta$ (απο α ερ.)
3. $B\Delta = A\Gamma$ (απο β ερ.)

(2) Δινεται ισοσκελες τριγωνο $A\hat{B}Γ$ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτασεις των ισων πλευρων του παιρνω τμηματα ΒΔ=ΓΕ. Ν.δ.ο: 1) ΓΔ=ΒΕ

2) $A\hat{Γ}Δ = A\hat{B}E$



1) Ειναι $B\hat{Δ}Γ = B\hat{Γ}E$ γιατι: 1) ΓΕ = ΒΔ (απο υποθεση)

2) ΒΓ κοινη

3) $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2$ (παραπληρωματικες ισων γωνιων $B_1 = Γ_1$)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα αντιστοιχα στοιχεια τους ισα δηλαδη: ΓΕ = ΒΕ, $\hat{Δ} = \hat{E}$, $B_3 = Γ_3$

2) Ειναι $A\hat{Γ}Δ = A\hat{B}Δ$ γιατι: 1) ΓΔ = ΒΕ (απο (1) ερ)

2) ΑΔ = ΑΕ (ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ = ΑΓ + ΓΕ = ΑΕ)

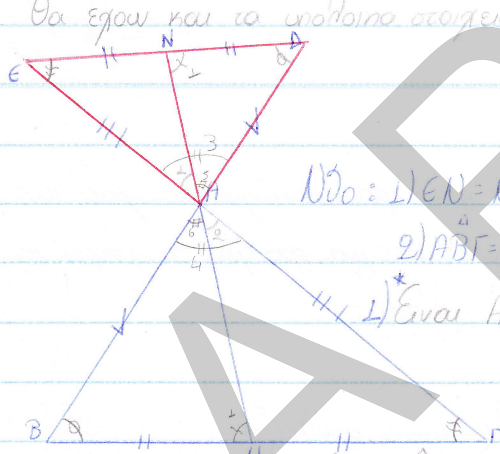
3) ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκ)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα δηλαδη: $\hat{A}$ = κοινη

$\hat{Δ} = \hat{E}$

$\hat{Γ} = \hat{B}$

(3)



Ν.δ.ο: 1) ΕΝ = ΝΔ

2) $A\hat{B}Γ = A\hat{Δ}E$

*1) Ειναι $A\hat{E}N = A\hat{M}Γ$ γιατι: 1) ΑΕ =

2) $\hat{A}_1 =$

3) ΑΜ

Εχουμε ΝΔ = ΒΜ και ΜΓ = ΕΝ

Αφου ΒΜ = ΜΓ τοτε:

ΒΜ = ΜΓ = ΕΝ = ΝΔ αρα

ΕΝ = ΝΔ αποδειχτηκε

Αρα θα εχουν... δηλ: $\hat{M}_2 = \hat{N}_2$, $\hat{Γ} = \hat{E}$, ΜΓ = ΕΝ

2) Ειναι $A\hat{B}Γ = A\hat{Δ}E$ γιατι: 1) ΑΓ = ΕΑ (απο υποθ)

2) ΒΑ = ΑΔ (-//-)

3) $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$ (κατακορυφην)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα κοινα τους στοιχεια ισα δηλαδη: $\hat{Δ} = \hat{B}$

$\hat{Γ} = \hat{E}$

ΒΓ = ΔΕ

*Ειναι $A\hat{Δ}N = A\hat{B}M$ γιατι: 1) $\hat{A}_5 = \hat{A}_6$ (κατακορυφην) 3) ΑΔ = ΑΒ

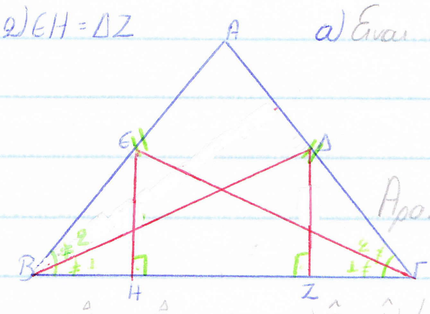
2) $\hat{Δ} = \hat{B}$ (ερωτημα 2)

Αρα θα εχουν.... δηλαδη: ΝΔ = ΒΜ, $\hat{N}_1 = \hat{M}_1$, ΑΜ = ΑΝ

④ $\hat{ΑΒΓ}$ ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) / ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι / ΕΗ ⊥ ΒΓ, ΔΖ ⊥ ΒΓ (→ κάθετη)

νδο 1) $Β\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Β}Ε$

2) ΕΗ = ΔΖ



α) Είναι $Β\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Β}Ε$ γιατί: 1) ΒΓ κοινή

2) $\hat{Γ} = \hat{Β}$ ($\hat{ΑΒΓ}$ ισοσκ.)

3) $\hat{Γ}_1 = \hat{Β}_1$ (ως μισές ίσων γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$)

Άρα.... δηλαδή: 1) ΔΓ = ΕΒ   3) ΕΓ = ΔΒ

2) $\hat{Δ}_1 = \hat{Ε}_1$

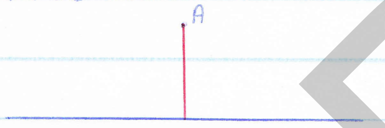
β) Είναι $Γ\hat{Η}Ε = Δ\hat{Β}Ζ$ γιατί: 1) $\hat{Ζ}_1 = \hat{Η}_1$ (ορθές επειδή ΔΖ και ΕΗ κάθετες)

2) ΕΓ = ΔΒ (ερωτ. α)

3) $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ (ως μισές ίσων γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$)

Άρα.... δηλαδή: 1) ΕΗ = ΔΖ   2) $Β\hat{Δ}Ζ = Γ\hat{Ε}Η$ 3) ΗΓ = ΖΒ

§3.5 Βλέπε βιβλίο



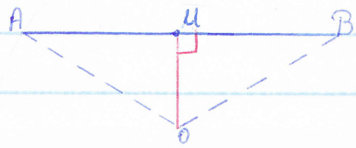
§3.6 Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τρία οποιαδήποτε στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα εκτός από την περίπτωση να έχουν τρεις γωνίες ίσες μια προς μια που μπορεί τα τρίγωνα αυτά να μη είναι ίσα

Θεώρημα Ι σελίδα 50: Από το βιβλίο χωρίς απόδειξη

Θεώρημα ΙΙ σελίδα 50: —— // —— —//—

Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 51 SOS Απαραίτητη

ΟΜ: απόστημα της χορδής ΑΒ

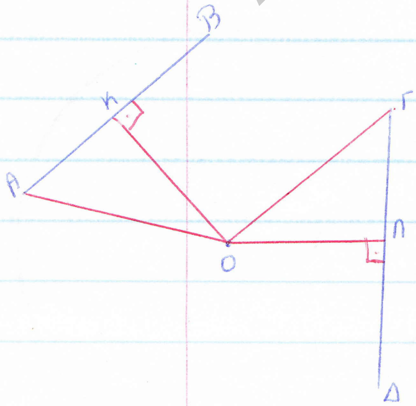


Ισχύει ότι $\boxed{ΑΜ = ΜΒ}$

γιατί $Ο\hat{Α}Μ = Ο\hat{Β}Μ$ γιατί: 1) ΟΑ = ΟΒ (ακτίνες)

2) ΟΜ κοινή

3) $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2 = 90°$



Οι χορδές είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους ίσα

Απόδειξη ⓐ

Υπόθεση	ΑΒ = ΓΔ
Συμπέρασμα	ΟΚ = ΟΛ

Φέρνω τις ΟΓ και ΟΑ / Είναι $Ο\hat{Α}Κ = Ο\hat{Γ}Λ$: 1) $\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90°$

2) ΟΑ = ΟΓ (ακτίνες)

3) ΑΚ = ΓΛ ($ΑΚ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} = ΓΛ$)

Άρα.... δηλ: $\boxed{ΟΚ = ΟΛ}$

(β) Υποθεση | $OK = O\Lambda$

Συμπερασμα | $AB = \Gamma\Delta$

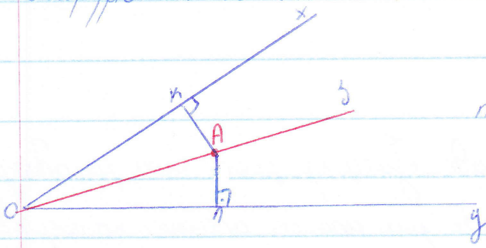
Φερνω τις $OA, O\Gamma$ / Είναι $O\hat{K}A = O\hat{\Gamma}\Lambda$ γιατι: 1) $OA = O\Gamma$ (ακτινες)
2) $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$
3) $OK = O\Lambda$ (υποθεση)

Αρα... δηλ: $AK = \Gamma\Lambda \Longleftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$

Αρα $AB = \Gamma\Delta$

↳ επειδη εχω δυο ισα κλασματα και οι παρανομαστες ειναι ισοι τοτε και αριθμητες ισοι

Θεωρημα IV σελιδα 51



Οδ διχοτομος αν και μονο αν το τυχαιο σημειο της α ισαπεχει απο τις πλευρες της

(α) Υποθεση | Οδ διχοτομος

Συμπερασμα | $AK = A\Lambda$

Είναι $A\hat{K}O = A\hat{\Lambda}O$ γιατι: 1) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
2) $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$
3) ΟΑ κοινή

Αρα... δηλ: $AK = A\Lambda$

Υποθεση | $AK = A\Lambda$

Συμπερασμα | Οδ διχοτομος

Είναι $A\hat{K}O = A\hat{\Lambda}O$ γιατι: 1) $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$
2) $AK = A\Lambda$ (υποθ.)
3) ΟΑ κοινή

Αρα... δηλ: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ δηλ Οδ διχοτομος

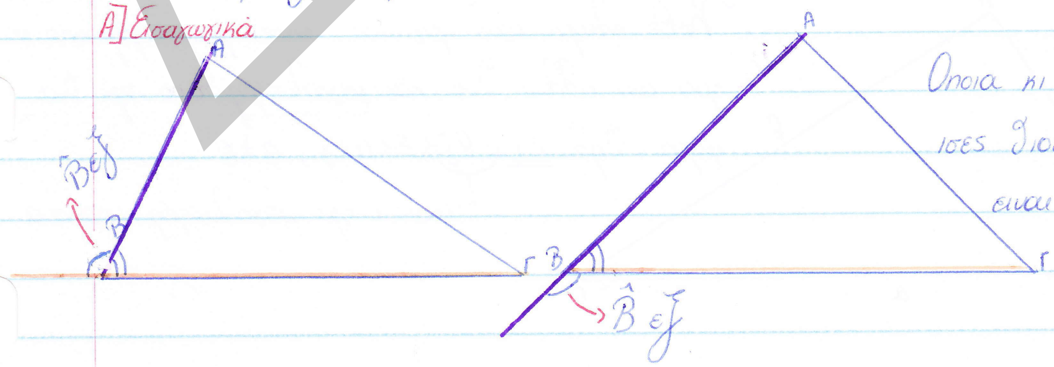
§3.7 Βλεπε βιβλιο - Γεωμετρικοι τοποι

§3.8 Εκτος Υλης

§3.9 Εκτος Υλης

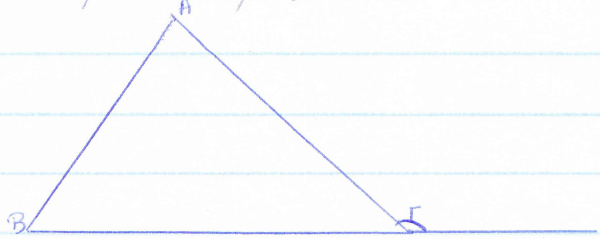
§3.10 Σχεση εξωτερικης και απεναντι γωνιας

Α] Εισαγωγικά



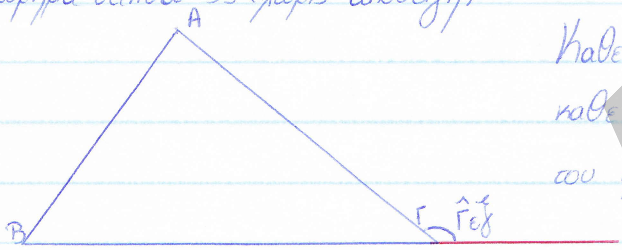
Οποια κι αν προεκτεινω ειναι ισες διοτι μαζι και οι δυο ειναι κατακορυφη αρα ισες

Να προεκτείνω την γωνία Γ



B] A Λυκείου

Θεώρημα σελίδα 59 (χωρίς απόδειξη)

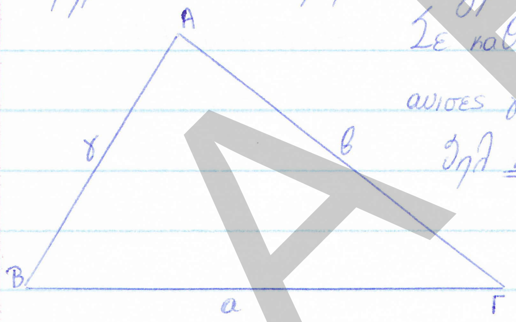


Καθε εξωτερική γωνια ειναι μεγαλυτερη απο καθε μια απο τις απεναντι εσωτερικες γωνιες του τριγωνου δηλ $\hat{Γ}_{εξ} > A$

$\hat{Γ}_{εξ} > B$

§3.11 Ανισοτικες σχεσεις πλευρων και γωνιων

Θεωρημα σελιδα 60 (χωρις αποδειξη)

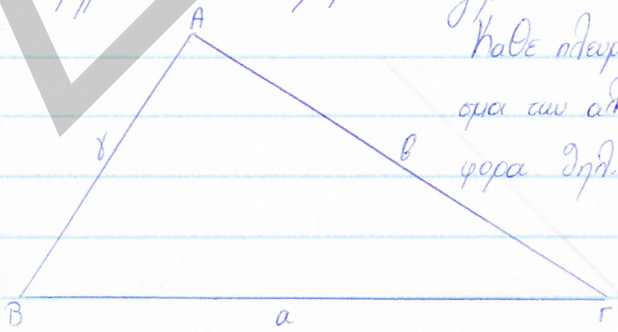


Σε καθε τριγωνο απεναντι απο ανισες πλευρες βρισκονται ομοια ανισες γωνιες και αντιστροφα

δηλ πχ $β > γ \overset{\text{ισχυει}}{\underset{\text{και αντιστροφα}}{\Longleftrightarrow}} \hat{B} > \hat{Γ}$

§3.12 Τριγωνική ανισοτητα

Θεωρημα σελιδα 60 (χωρις αποδειξη)



Καθε πλευρα ενος τριγωνου ειναι μικροτερη απο το αθροισμα των αλλων δυο και μεγαλυτερη απο την διαφορα δηλ. πχ $α-γ < β < α+γ$, $α \geq γ$

↳ παντα την μεγαλυτερη μπροστα

2η κατηγορια Ασκησεις με ανισοτικες σχεσεις γωνιων η πλευρων

Θεωρειται αρκετα δυσκολη κατηγορια με πολύ δυσκολες ασκησεις. Για βοηθεια δινουμε το παρακατω σχεδιαγραμμα

Σχεδιαγραμμα: νδο $(\alpha<\beta)$ → αντιστοιχα και για γωνιες

$\boxed{\text{Οι } \alpha,\beta \text{ βρισκονται στο ιδιο τριγωνο;}}$

Ν → Αρκει νδο οι απεναντι τους γωνιες ειναι ομοιως ανισες (εδω "παιζει" πολυ η εξωτερικη γωνια)

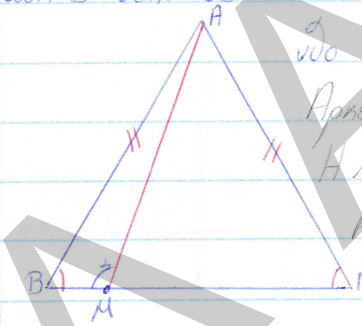
Ο → Μηπως μπορω να τις κανω να βρεθουν στο ιδιο τριγωνο, φερνοντας "κατι" και δουλευοντας με ισες πλευ;

Ν → Αρκει νδο οι απεναντι τους γωνιες ειναι ομοιως ανισες (εδω "παιζει" πολυ η εξωτερικη γωνια)

Ο → Στηριζομαι στην εφαρμογη 2 σελιδα 161: "αν δυο τριγωνα εχουν δυο μονο πλευρες ισες και τις περιεχομενες τους γωνιες ανισες τοτε θα εχουν ομοιως ανισες τις απεναντι τους πλευρες και αντιστροφα

Ασκησεις 2ης κατηγοριας:

① ασκ 5 σελ 63



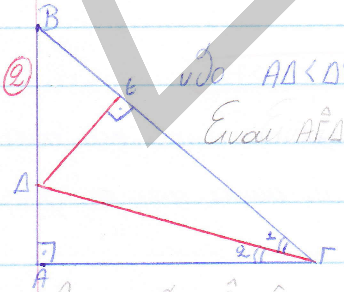
νδο $AM<AB$

Αρκει νδο $\hat{B}<\hat{M}_1$

Η $A\hat{M}_1$ ειναι εξωτερικη στο τριγωνο $A\hat{M}\Gamma$

Αρα $\hat{M}_1>\Gamma$, ομως $\hat{\Gamma}=\hat{B}$ } $\hat{M}_1>B$ επειδη $\Gamma=B$ βαζουμε ουσιαστικα στη θεση του Γ το Β και το αποδειξαμε

②



νδο $A\Delta<\Delta B$

Ειναι $A\Gamma\Delta=\Gamma\Delta E$ γιατι: 1) $\hat{A}=\hat{E}=90°$

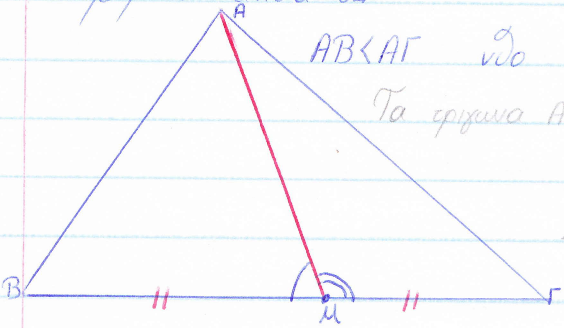
2) ΑΓ κοινη

3) $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (ΓΔ διχοτομος της Γ)

Αρα ... δηλ: $A\Delta=\Delta E$ ειναι λες και πηρα την ΑΔ και την εβαλα στην ΔΕ εφοσον απεδειξα οτι ειναι ισες

Αρκει νδο $\hat{B}<\hat{E}$ που ισχυει αφου $\hat{E}=90°$

ασκηση 2 σελίδα 64



ΑΒ<ΑΓ νδο $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$

Τα τριγωνα $A\hat{B}M$ και $A\hat{M}\Gamma$ εχουν: 1) ΑΜ κοινη

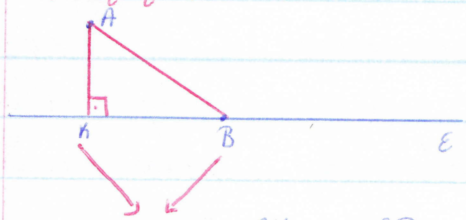
2) ΒΜ = ΜΓ

3) ΑΒ<ΑΓ

που ⇓ $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$

§3.13 Καθετες και πλαγιες

Α] Εισαγωγικά

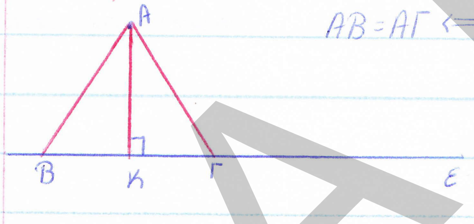


ίχνη των ΑΚ και ΑΒ

ΑΚ: καθετο ευθυγραμμο τμημα απο το Α στην ε

ΑΒ: πλαγιο ευθυγραμμο τμημα

Β] Θεωρημα Ι σελίδα 65



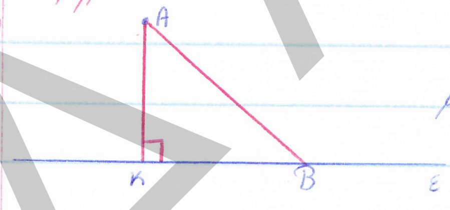
ΑΒ=ΑΓ ⟺ ΒΚ=ΚΓ

τα ιχνη τους ισαπεχουν απο το ιχνος της καθετου

Αποδειξη: Βλεπε βιβλιο

Θεωρημα ΙΙ σελίδα 65

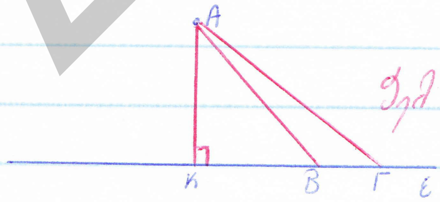
@



Ισχυει οτι το καθετο ευθυγραμμο τμημα ειναι μικροτερο απο καθε πλαγιο ⟶ δηλ ΑΚ<ΑΒ

Αποδειξη: Βλεπε βιβλιο

(b)



Ισχυει οτι $\boxed{A\Gamma > AB \iff \Gamma K > BK}$

δηλ δυο πλαγια τμηματα ειναι ανισα αν και μονο αν τα ιχνη τους απεχουν ομοιως ανισα απο το ιχνος της καθετου

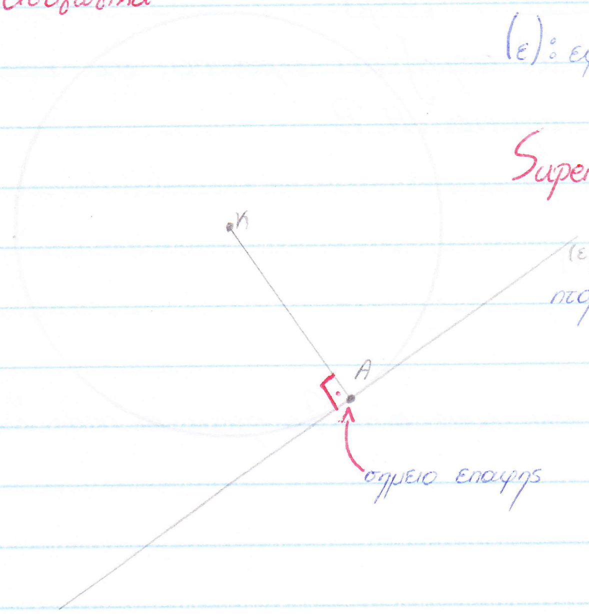
Αποδειξη: Εκτος Ύλης

§3.11 Σχετικές Θέσεις ευθείας και κύκλου

A) Εισαγωγικά

(ε): εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α

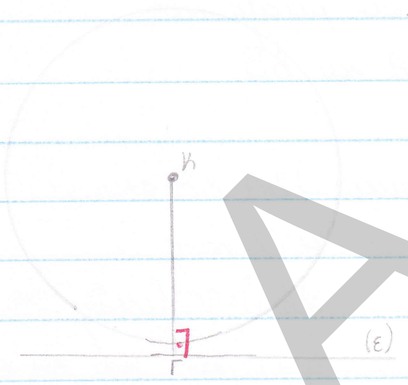
Super Σημείωση: Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι πάντα κάθετη στην εφαπτομένη



B) 1η Θέση

$\boxed{ΚΓ = d}$ $\boxed{d > ρ}$

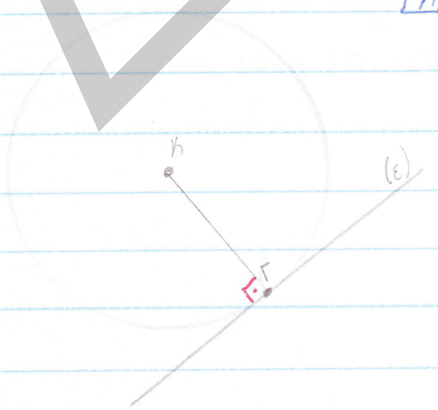
Η (ε) ονομάζεται εξωτερική του κύκλου



2η Θέση

$\boxed{ΚΓ = d}$ $\boxed{d = ρ}$

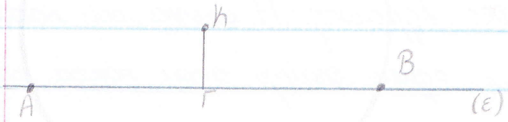
Η (ε) ονομάζεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ



3η Θεση

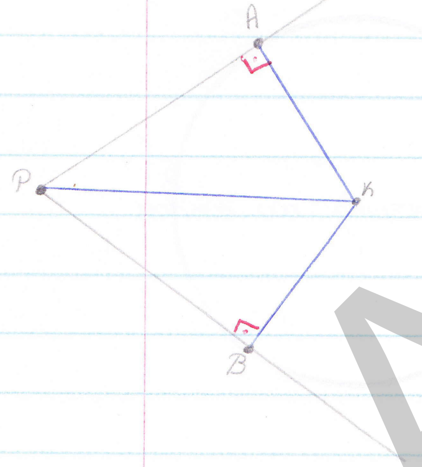
$\boxed{K\Gamma = \delta}$ $\boxed{\delta < \rho}$

Η (ε) ονομαζεται τεμνουσα του κυκλου στα σημεια Α, Β



Συμπερασμα: μια ευθεια και ενας κυκλος εχουν το πολυ δυο κοινα σημεια

Super Sos $\boxed{§3.15}$ Εφαπτομενα τμηματα



Θεωρημα ΙΙ σελιδα 68:

Τα εφαπτομενα τμηματα ενος κυκλου που αγωνται (φερονται) απο σημ εκτος αυτου, ειναι ισα μεταξυ τους

Φερνω τις ΡΚ, ΚΑ και ΚΒ

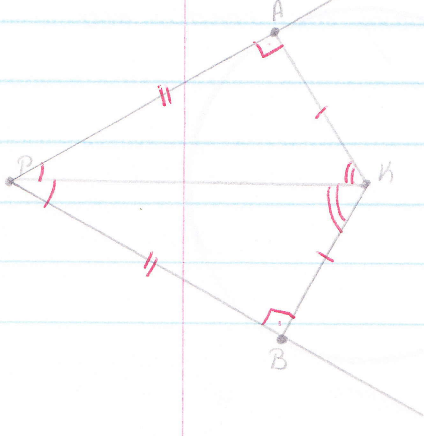
Ειναι $P\hat{A}K = P\hat{B}K$ γιατι: 1) ΚΑ=ΚΒ (ακτινες)

2) ΡΚ κοινη

3) $\hat{A} = \hat{B} = 90°$ (επειδη ΡΑ, ΡΒ εφαπτομενες και ΚΑ, ΚΒ ακτινες)

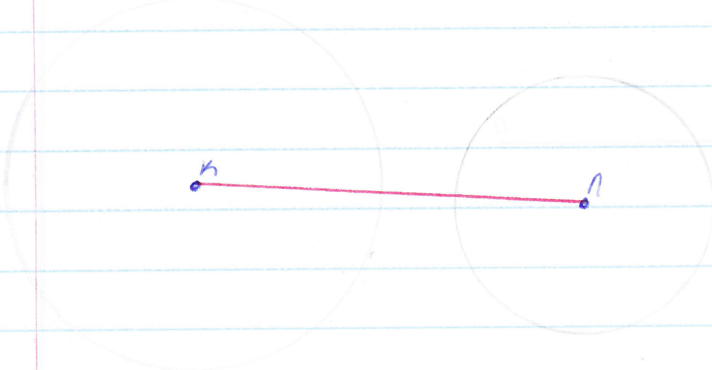
Αρα.... δηλαδη: $\boxed{PA = PB}$

Super Σημειωση: Οταν εχω το παραπανω σχημα σε ασκηση μπορω απευθειας να σημειωσω ισα ο,τι φαινεται με το ματι οτι ειναι ισα



§3.16 Σχετικες Θεσεις δυο κυκλων

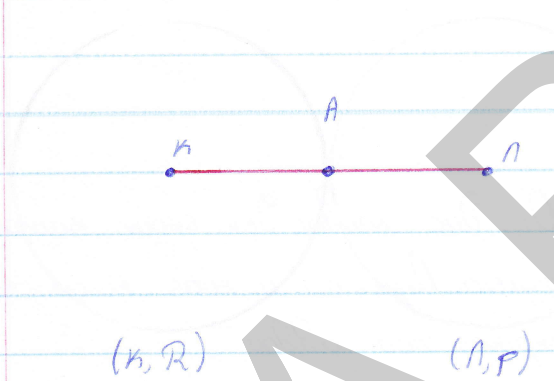
Α] Εισαγωγικα



ΚΛ: διακεντρος
Θα τη συμβολιζουμε με δ στην §3.16

Β] Σχετικες Θεσεις

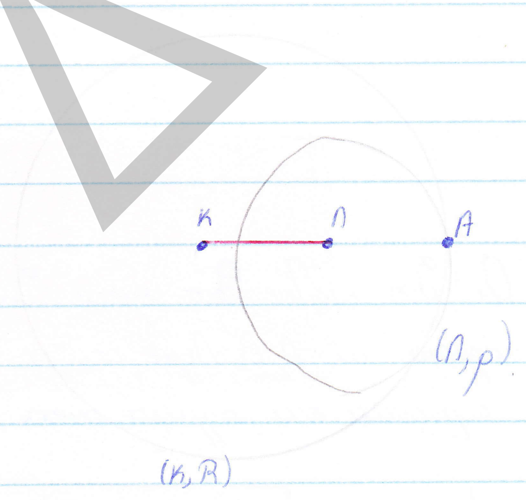
Σχημα 1:



Οι δυο κυκλοι εχουν μονο ενα κοινο σημειο μεταξυ τους, το Α. Λεμε οτι οι κυκλοι αυτοι εφαπτονται εξωτερικα

Ισχυει οτι: $\boxed{\delta = R + \rho}$

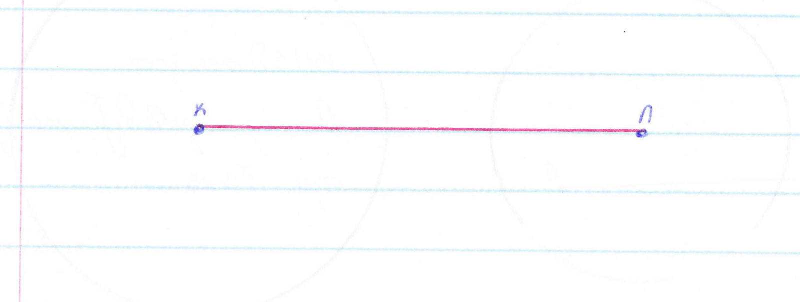
Σχημα 2:



Οι δυο κυκλοι εχουν μονο ενα κοινο σημειο το Α. Λεμε οτι οι κυκλοι αυτοι εφαπτονται εσωτερικα

Ισχυει οτι: $\boxed{\delta = R - \rho}$

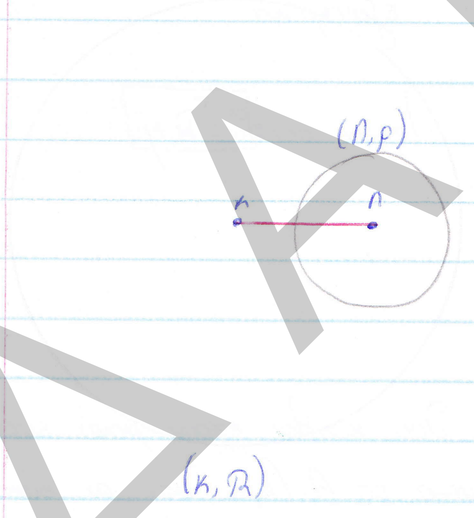
Σχημα 3:



Οι δυο κυκλοι δεν εχουν κοινα σημεια. Λεμε οτι ο ενας κυκλος ειναι εξωτερικος του ~~αλλου~~ αλλου

Ισχυει οτι: $\boxed{\delta > R+\rho}$

Σχημα 4:

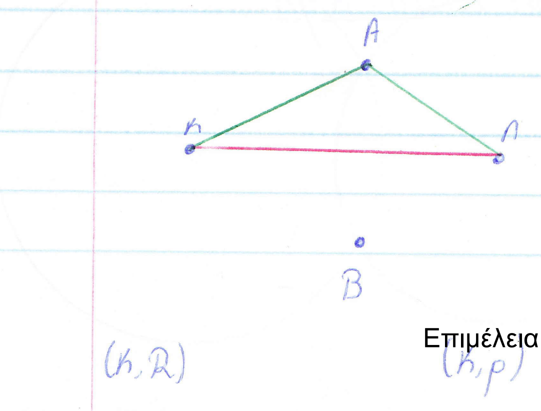


Οι δυο κυκλοι δεν εχουν κοινα σημεια. Λεμε οτι ο ενας ειναι εσωτερικος του αλλου

Ισχυει οτι: $\boxed{\delta < R-\rho}$

$(\delta+\rho < R)$

Σχημα 5:



$AK - A\Lambda < K\Lambda < AK + A\Lambda$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$R - \rho < \delta < R + \rho$

Οι δυο κυ… κοινα σημεια τα … κλοι τεμνονται στα σημεια αυτα

Ισχυει οτι: $\boxed{R-\rho < \delta < R+\rho}$

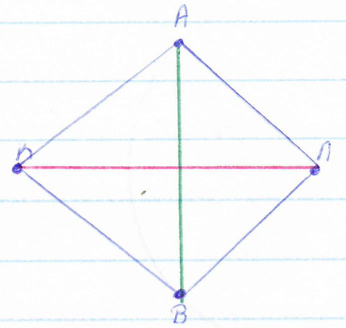
Γιατι: φερνω τις ΑΚ, ΑΛ. Τριγωνικη ανισοτητα στο τριγωνο ΑΚΛ

(1) Θεωρημα σελ 70
(αναφερεται στο σχ. 5)

Γενικό Συμπέρασμα:

Δυο διαφορετικοί κυκλοι εχουν το πολύ δυο κοινα σημεια

Θεωρημα σελ 70



AB: κοινη χορδη των δυο κυκλων

Ισχυει οτι η διακεντρος ειναι μεσοκαθετος της κοινης χορδης τους

Αποδειξη:

Φερνω τις ΚΑ, ΚΒ, ΛΑ, ΛΒ

Ειναι ΚΑ = ΚΒ = R αρα το Κ ανηκει στη μεσοκαθετο του ΑΒ.

Ομοια ΛΑ = ΛΒ = ρ αρα το Λ ανηκει στη μεσοκαθετο του ΑΒ.

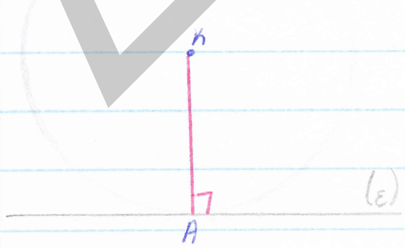
Ομως τα Κ και Λ οριζουν μονο ενα ευθυγραμμο τμημα, το ΚΛ

Αρα το ΚΛ ειναι μεσοκαθετος του ΑΒ

3η κατηγορια: Ασκησεις στον κυκλο

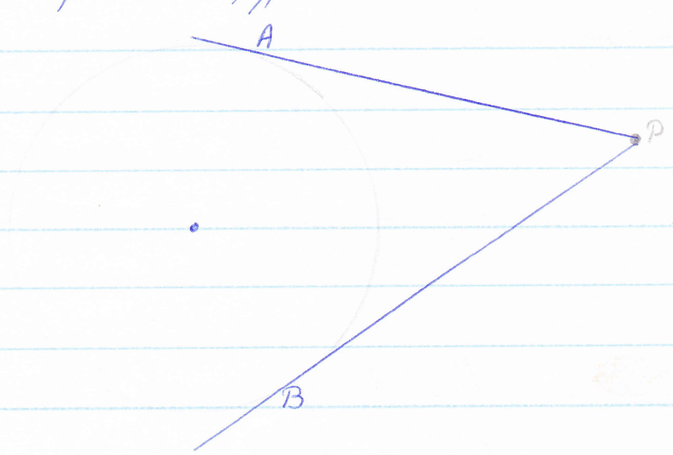
Απλα πρεπει να εχω υποψην μου τα παρακατω σχηματα

1)



ΚΑ ⊥ (ε)

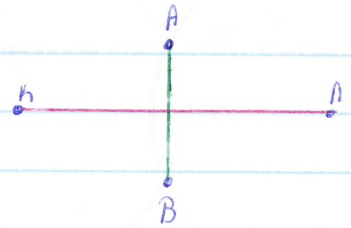
2)



Οτι φαινεται με το ματι ειναι ισα
(απο Θεωρια)

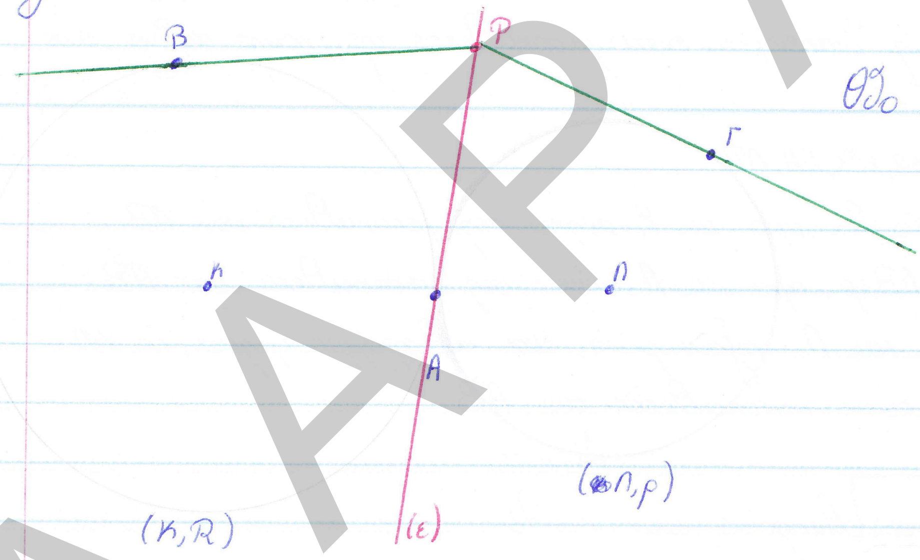
Συμβουλη: απο την κατηγορια αυτη να ξεκινω πρωτα (για 3η κατηγορια)

3)



Ασκησεις

1) Δυο κυκλοι εφαπτονται εξωτερικά στο A απο σημειο P, εκτος αυτ κυκλων που βρισκεται πανω στην κοινη εσωτερική εφαπτωμενη τους φερνουμε εφαπτομενες στους κυκλους αυτους.
Να δειξετε οτι τα δυο αυτα εφαπτομενα τμηματα ειναι ισα μεταξυ τους

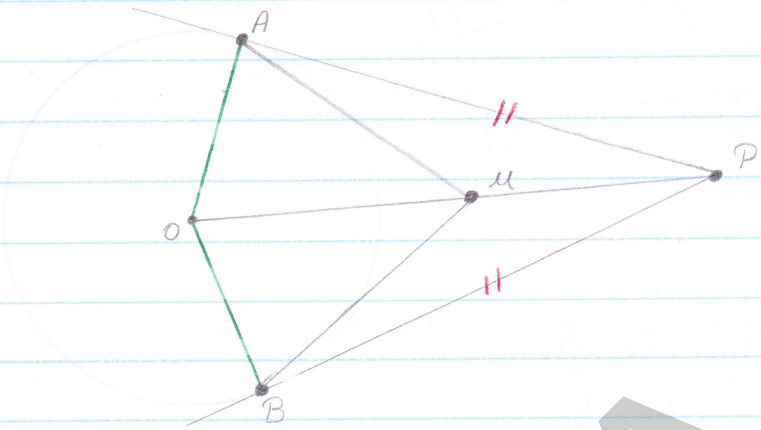


Θδο $PB=P\Gamma$

Απαντηση: PB, PA εφαπτομενες του (K,R)
Αρα απο γνωστο Θεωρημα $PB=PA$
Ομοια $PA, P\Gamma$ εφαπτομενες του (Λ,ρ)
Αρα απο γνωστο Θεωρημα $PA=P\Gamma$
Τελικα $PB=P\Gamma$

2) Απο εξωτερικο σημειο P ενος κυκλου (O,ρ) φερνουμε τα εφαπτομενα τμηματα PA, PB. Αν M ειναι ενα τυχαιο εσωτερικο σημειο του OP να δειχθει οτι:

α) $P\hat{A}M = P\hat{M}B$
β) $M\hat{A}O = M\hat{B}O$



α) Ειναι $P\hat{A}M = P\hat{M}B$ γιατι: 1) MP κοινη
2) PB = PA (απο γνωστο θεωρημα)
3) $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (— // —)

Αρα θα εχουν και τα υπολοιπα σημεια τους ισα δηλ: 1) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
2) $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
3) AM = MB

β) Ειναι $M\hat{A}O = M\hat{B}O$ γιατι: 1) AO = OB (ακτινες)
2) OM κοινη
3) MA = MB

Κεφαλαιο 4ο Παραλληλες ευθειες

§4.1 Εισαγωγη

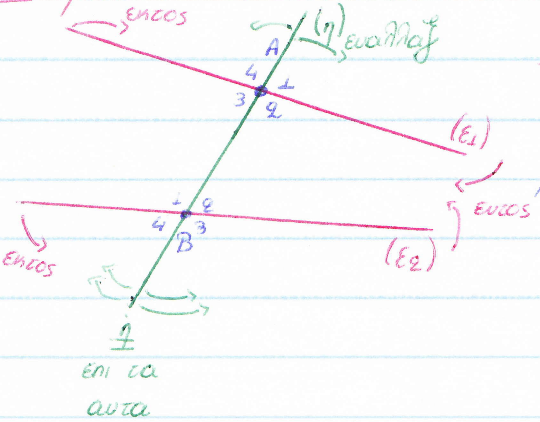
Δυο ευθειες λεγονται παραλληλες οταν βρισκονται στο ιδιο επιπεδο και δεν εχουν κανενα κοινο σημειο

(ε)

(η)

(ε) // (η) → παραλληλη

§4.2 Τεμνουσα δυο ευθειων



Κανονας: Θα χρησιμοποιω παντα δυο γωνιες. Μια απο τις "πανω" και μια απο τις "κατω"

① **Εντος εναλλαξ:** $\hat{A}_3, \hat{B}_2$
$\hat{A}_2, \hat{B}_1$

② **Εντος εκτος και επι τα αυτά:** $\hat{A}_1, \hat{B}_2$
$\hat{A}_2, \hat{B}_3$
$\hat{A}_4, \hat{B}_1$
$\hat{A}_3, \hat{B}_4$

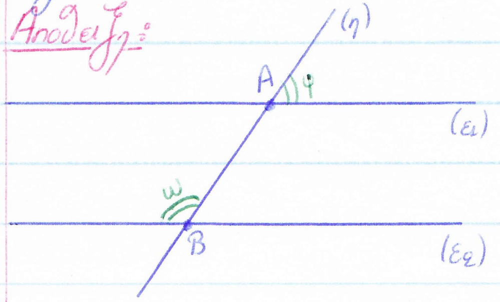
③ **Εντος και επι τα αυτα:** $\hat{A}_3, \hat{B}_1$
$\hat{A}_2, \hat{B}_2$

Super Σημειωση: Υπαρχουν κι αλλοι συνδιασμοι (πχ εκτος εναλλαξ κλπ). Επιλεξαμε ομως μονο αυτους τους τρεις γιατι "κατι" θα μαθουμε γι αυτους παρακατω

1ος **Θεωρημα σελιδα 80**

Αν δυο ευθειες τεμνομενες απο τριτη σχηματιζουν δυο εντος εναλλαξ γωνιες ισες τοτε ειναι παραλληλες

Αποδειξη:



Ειναι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$
Θδο $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$

Ας υποθεσουμε οτι $(\varepsilon_1) \not\parallel (\varepsilon_2)$ δεν ειναι παραλληλες

Αρα: $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ θα τεμνονται εστω στο Γ

Αρα: Δημιουργειται το τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$

Αρα: η $\hat{\omega}$ θα ειναι εξωτερικη του τριγωνου $\hat{ΑΒΓ}$

Αρα: η $\hat{\omega}$ θα ειναι μεγαλυτερη απο τις δυο απεναντι εξωτερικες γωνιες

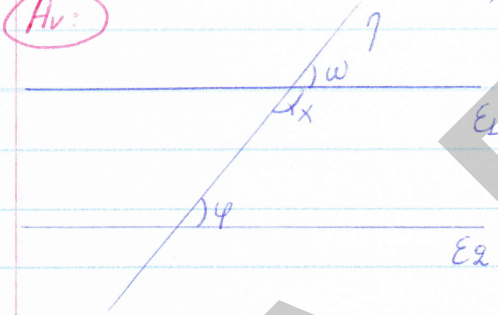
δηλαδη $\hat{\omega} > \hat{Γ}$ και $\boxed{\hat{\omega} > \hat{\varphi}} \rightarrow$ Ατοπο

Επομενως: $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$

Πορισμα Ι σελιδα 81

Αν δυο ευθειες τεμνομενες απο τριτη σχηματιζουν δυο εντος, εκτος και επι τ'αυτα γωνιες ισες ή δυο εντος και επι τ'αυτα γωνιες παραπληρωματικες τοτε ειναι παραλληλες.

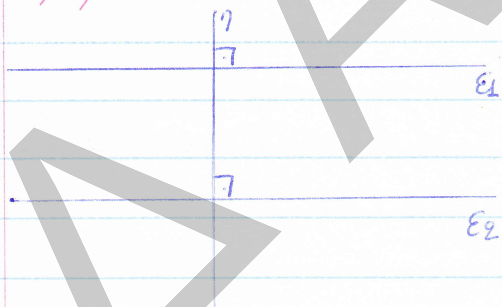
Αν:



1) $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$
ή
2) $\hat{\varphi} + \hat{x} = 180°$

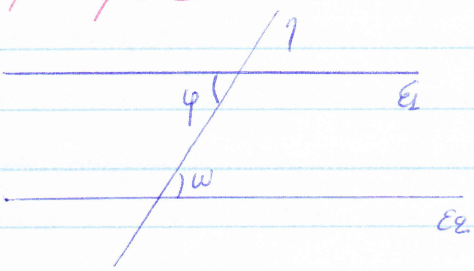
τοτε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Πορισμα ΙΙ σελιδα 81



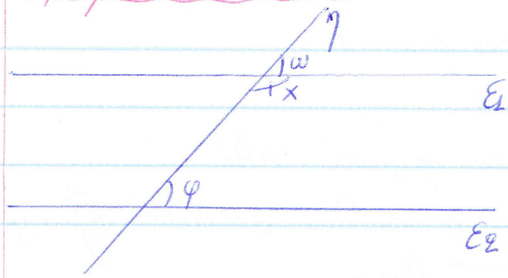
$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 \perp \eta \\ \varepsilon_2 \perp \eta \end{matrix}\right\} \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Προταση Ι σελιδα 81 (αντιστροφο του Θεωρηματος σελιδα 80)



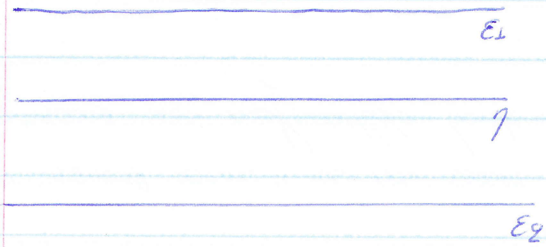
$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ Αρα $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$

Πορισμα σελιδα 82 (αντιθετο του πορισματος Ι σελιδα 81)



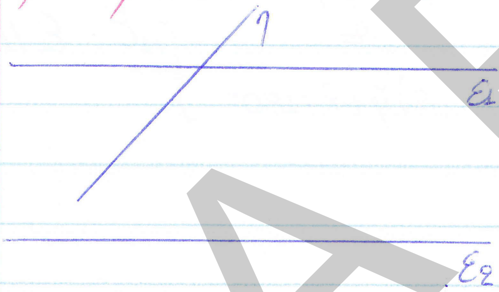
$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \text{ Αρα: } \begin{cases} \hat{\varphi} = \hat{\omega} \\ \hat{\varphi} + \hat{x} = 180^\circ \end{cases}$$

Προταση ΙΙ σελιδα 82



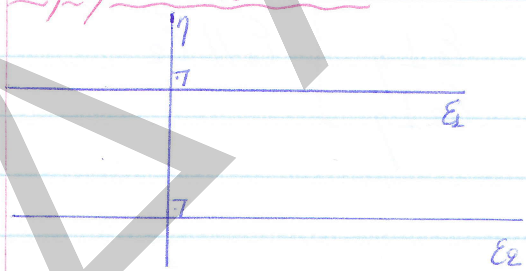
$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 // \eta \\ \varepsilon_2 // \eta \end{matrix}\right\} \varepsilon_1 // \varepsilon_2$$

Προταση ΙΙΙ σελιδα 82



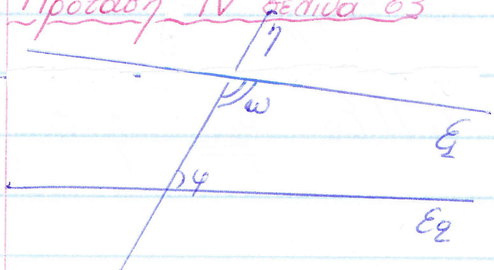
$(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$
(η) τεμνει την (ε_1) } Αρα (η) τεμνει και την ε_2

Πορισμα σελιδα 83



$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \\ \eta \perp \varepsilon_1 \end{matrix}\right\} \text{Αρα } \eta \perp \varepsilon_2$$

Προταση IV σελιδα 83



Αν δυο ευθειες τεμνομενες απο τριτη σχηματιζουν δυο εντος και επι τ' αυτα γωνιες με αθροισμα μικροτερες απο 180° τοτε οι ευθειες τεμνουνται προς το μερος της τεμνουσας που βρισκονται οι γωνιες αυτες

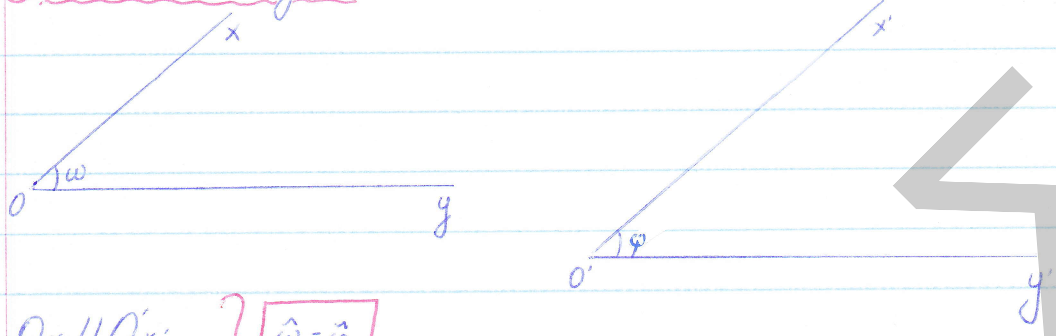
$\hat{\varphi} + \hat{\omega} < 180^\circ$

Αρα $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τεμνονται προς τα δεξια

§4.3 Εκτός Ύλης

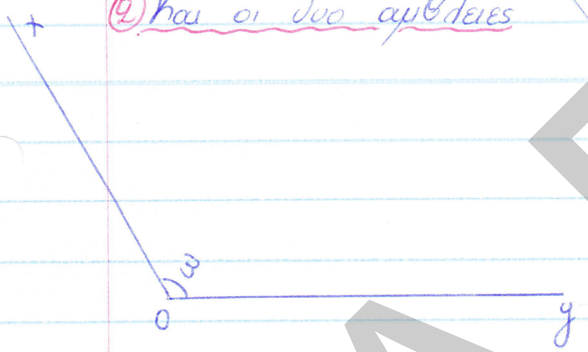
§4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

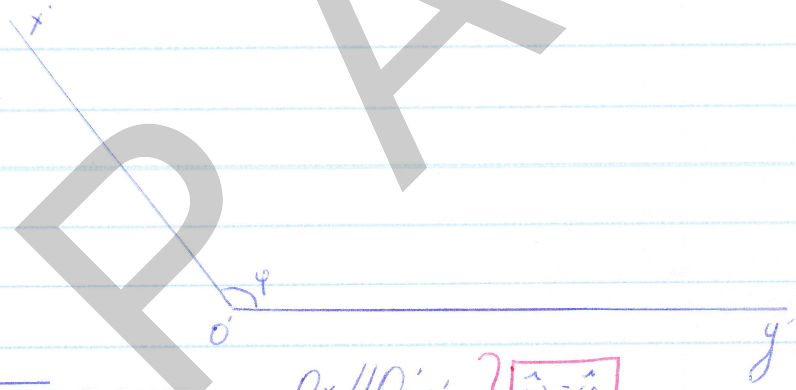
① Και οι δύο οξείες



$$\left.\begin{array}{l} Ox \parallel O'x' \\ Oy \parallel O'y' \end{array}\right\} \boxed{\hat{\omega} = \hat{\varphi}}$$

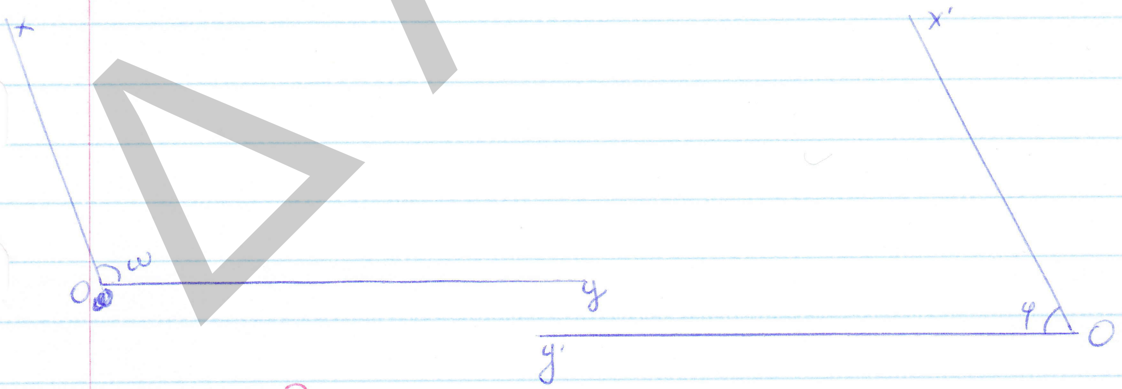
② Και οι δύο αμβλείες





$$\left.\begin{array}{l} Ox \parallel O'x' \\ Oy \parallel O'y' \end{array}\right\} \boxed{\hat{\omega} = \hat{\varphi}}$$

③ Η μία αμβλεία και η άλλη οξεία



$$\left.\begin{array}{l} Ox \parallel O'x' \\ Oy \parallel O'y' \end{array}\right\} \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180°$$

Προσωρινα Θα μενει κενο. Μαλλον εκτος Υλης

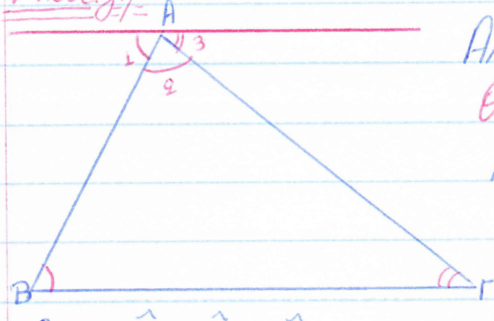
$\boxed{\S 4.5}$ Αξιοσημειωτοι κυκλοι τριγωνων

§4.6 Αθροισμα γωνιων τριγωνου

Θεωρημα σελιδα 88

Σε καθε τριγωνο το αθροισμα των γωνιων του ειναι 180°

Αποδειξη:



Απο το Α φερνω παραλληλη προς την βαση ΒΓ

Θδο $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$

Αρα $\hat{A}_1=\hat{B}$ (ως εντος εναλλαξ)

και $\hat{A}_3=\hat{\Gamma}$ (— // —)

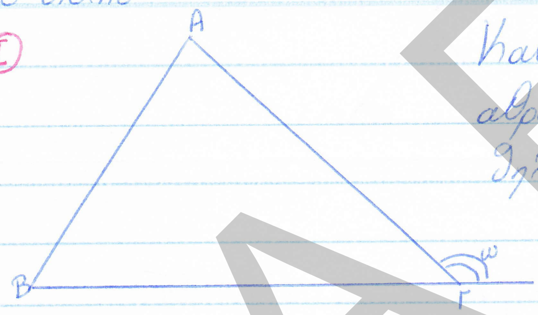
Ομως $\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180° \iff \hat{B}+\hat{A}+\hat{\Gamma}=180°$

↳ του τριγωνου

Πορισματα σελιδα 89

Μονο το πορισμα Ι εχει αποδειξη. Τα υπολοιπα πορισματα διαβασμα απο το βιβλιο

(Ι)



Καθε εξωτερικη γωνια τριγωνου ισουται με το αθροισμα των δυο απεναντι εσωτερικων γωνιων δηλ $\boxed{\hat{A}+\hat{B}=\hat{\omega}}$

Αποδειξη:

Ειναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \iff$

$\iff \hat{A}+\hat{B}=180°-\hat{\Gamma}$

$\iff \hat{A}+\hat{B}=\hat{\omega}$

4η κατηγορια: Καθετοτητα - Παραλληλια

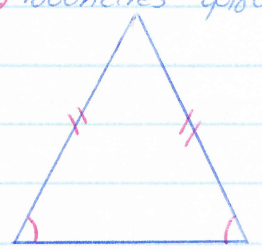
Η κατηγορια αυτη ειναι βοηθητικη των προηγουμενων κατηγοριων

Δουλευω ετσι:

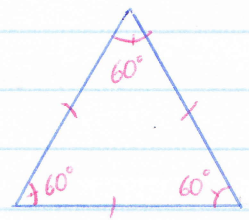
(1) Ψαχνω για καποιο ή καποια απο τα παρακατω σχηματα ωστε να σημειωσω σε αυτα καποια ισα στοιχεια:

↳ ΠΙΣΩ

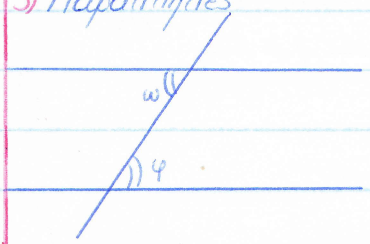
1) Ισοσκελες τριγωνο



2) Ισοπλευρο τριγωνο



3) Παραλληλες

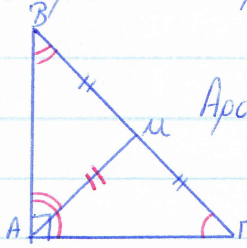


$\hat{\omega}=\hat{\varphi}$

Προσοχη: Ειναι σημαντικο να σημειωνω μονο τις γωνιες που παιζουν ρολο στην ασκηση μου (εχω σημαδι)

Ιουνιο →

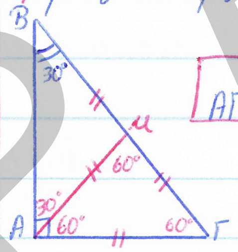
4) Διαμεσος από ορθη γωνια



$AM = BM = M\Gamma$

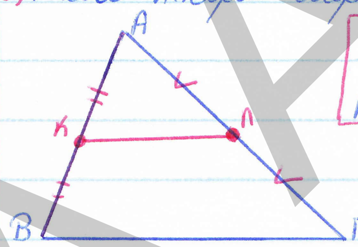
Αρα $\boxed{AM = B\Gamma/2}$

5) Ορθογωνιο τριγωνο με μια γωνια 30°



$\boxed{A\Gamma = B\Gamma/2}$

6) Μεσα πλευρων ενωμενα



$\boxed{\begin{array}{l} K: \text{μεσο } AB \\ \Lambda: \text{μεσο } A\Gamma \end{array}}$

Ισχυει οτι: 1) $K\Lambda // B\Gamma$

2) $K\Lambda = B\Gamma/2$

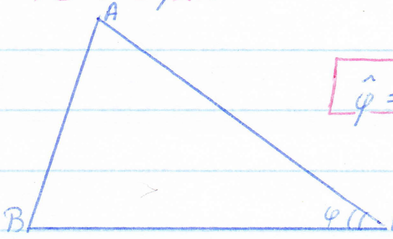
Και οποιαδηποτε αλλα δυο απο τα τεσσερα να ισχυουν, τοτε θα ισχυουν και τα υπολοιπα 2.

② Το βημα αυτο γινεται μονο οταν εχω να αποδειξω μια ισοτητα με γωνιες.

Ξεκινω απο το ενα μελος (εδω 99,9% ξεκινω απο το πιο απλο) με σκοπο να φθασω στο αλλο. Για να γινει αυτο αντικαθιστω καθε γωνια $\hat{\varphi}$ του μελους που εχω ξεκινησει με ενα απο τα παρακατω σχηματα.

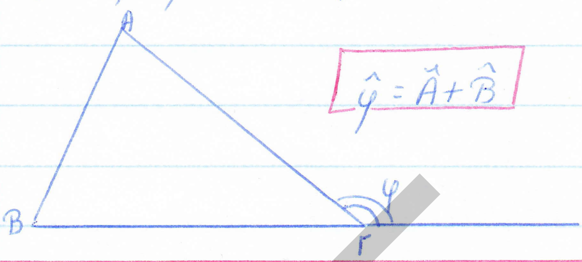
1η ομάδα: Σε τρίγωνο

1) Γωνία τριγώνου



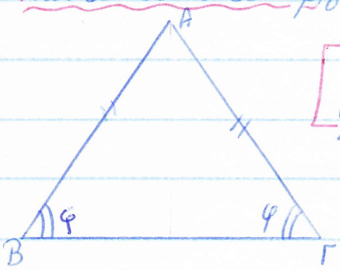
$\boxed{\hat{\varphi} = 180° - \hat{A} - \hat{B}}$

2) Εξωτερική γωνία τριγώνου



$\boxed{\hat{\varphi} = \hat{A} + \hat{B}}$

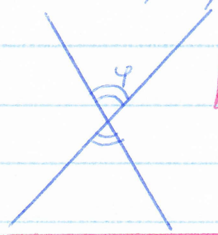
!(*) 3) Γωνία βάσης ισοσκελές τριγώνου



$\boxed{\hat{\varphi} = 90° - \dfrac{\hat{A}}{2}}$

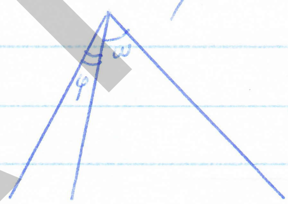
2η ομάδα: Χωρίς τρίγωνο

1) Κατακορυφήν



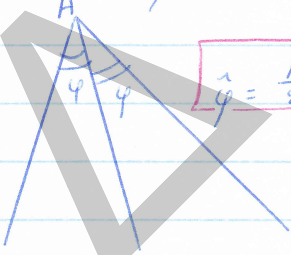
$\boxed{\hat{\varphi} = \hat{\omega}}$

2) "Δίπλα της" κάποια άνιση



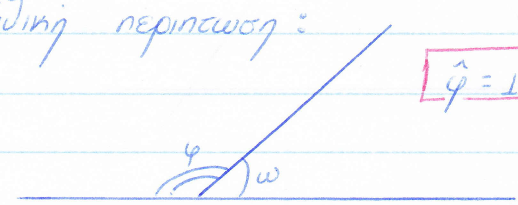
$\boxed{\hat{\varphi} = \hat{A} - \hat{\omega}}$

!(*) 3) "Δίπλα της" κάποια ίση



$\boxed{\hat{\varphi} = \dfrac{\hat{A}}{2}}$

Ειδική περίπτωση:



$\boxed{\hat{\varphi} = 180° - \hat{\omega}}$

Super Σημειώσεις:

1) Κάθε φορά επιλέγω το σχήμα εκείνο ώστε μετά την αντικατάσταση του τύπου του να έχω όσο το δυνατόν περισσότερες γωνίες του μέλους στο οποίο θέλω να φθάσω όπως επίσης να έχω όσο το δυνατόν λιγότερες «άσχετες» γωνίες.

2) Τις μοιρες και τους αριθμους δεν τα πειραζω

3) Οταν εχω γωνια του μεγαλου τριγωνου και θελω να την αντικαταστησω, την αλλαζω ετσι: $\boxed{\hat{\varphi} = 180° - (\text{οι αλλες δυο του})}$

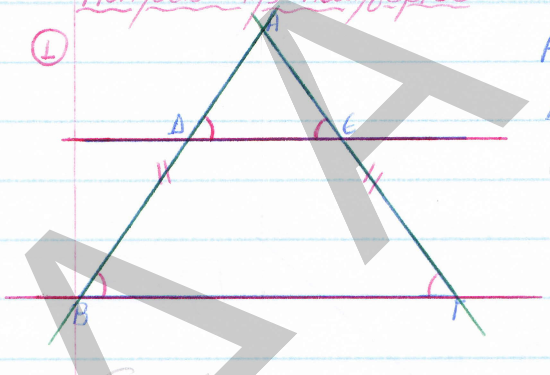
(*) 4) Οταν εμφανιστει σχημα που εχει θαυμαστικο, τοτε επιλεγω απευθειας αυτο και δεν ψαχνω αλλο

5) Απαγορευεται να επιλεξω το ιδιο σχημα σε δυο συνεχομενα =

6) Στην κατηγορια αυτη ανηκαν και οι ασκησεις εκεινες που μου ζητουν να βρω μια γωνια (σε μοιρες).
Τοτε απλα αφου κανω το βημα 1 χρησιμοποιω μονο το σχημα 1 της πρωτης ομαδος του βηματος 2
(τεχνικη για να βρω τη $\hat{\varphi}$ αρκει να βρω την $\hat{\omega}$, για να βρω την $\hat{\omega}$ αρκει να βρω την $\hat{k}$ κλπ)

Ασκησεις 4ης κατηγοριας

①



$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκ. υδο $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ ισοσκ

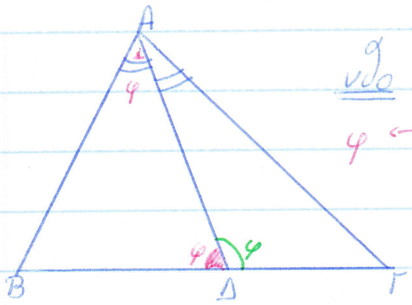
ΔΕ // ΒΓ

Ειναι $\hat{Β} = \hat{Δ}_1$ ως εντος εκτος και επι τα αυτα των ΔΕ // ΒΓ που τεμνονται απο την ΑΒ

Ειναι $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1$ ως εντος εκτος και επι τα αυτα των ΔΕ // ΒΓ που τεμνονται απο την ΑΓ

Ομως $\hat{Β} = \hat{Γ}$ αρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Ε}_1$ δηλ $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ ισοσκ

(2)



νδο $A\hat{\Delta}B = 90° - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$ ← αν κανω φιου:

$\varphi \leftarrow A\hat{\Delta}B = 180° - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180° - \hat{B} - \hat{\varphi} = 180° - \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2} = 180° - \hat{B} - \frac{\hat{\varphi}}{2} = 180° - \hat{B} - \frac{180° - \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{360° - 2\hat{B} - 180° + \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{180° + \hat{\Gamma} - \hat{B}}{2} =$

νδο $A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

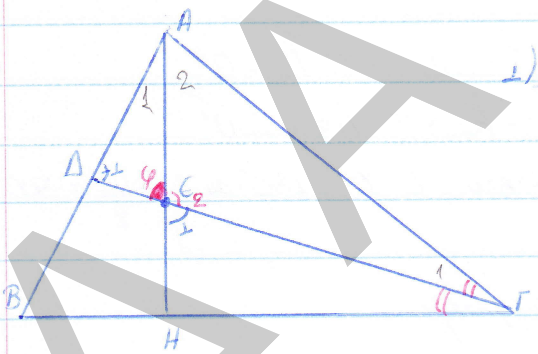
$\hat{\varphi} = \hat{A}_1 + \hat{B}$

$\hat{\varphi} = 180° - \hat{A}_2 - \hat{\Gamma}$

$\hat{\varphi} = 180° - \hat{\Delta}_1$

$A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}_1 + \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} = \frac{180° - \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} + \hat{B} = \frac{180° - \hat{B} - \hat{\Gamma} + 2\hat{B}}{2} = \frac{180° + \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

(3)



1) νδο $A\hat{E}\Delta = 90° - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

$\hat{\varphi} = \hat{E}_1$ ✓

$\hat{\varphi} = 180° - \hat{E}_2$ ✓

$\hat{\varphi} = 180° - \hat{A}_1 - \hat{\Delta}$ ✓

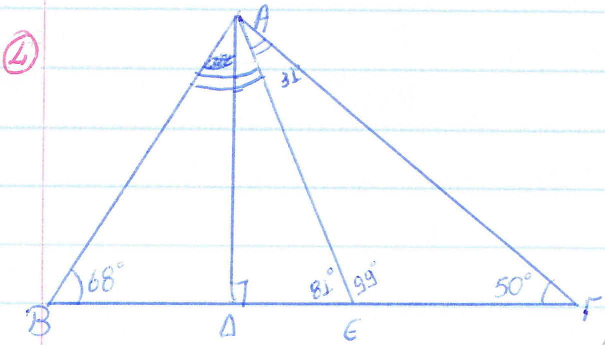
$\hat{\varphi} = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma}_1$ ✓

$\varphi = 180° - 90° - \hat{\Gamma}_2$

$A\hat{E}\Delta = \hat{E}_1 = 180° - 90° - \Gamma_2 = 90° - \frac{\Gamma}{2}$

2) Αν η παραλληλη απο το Η προς τη ΓΔ τεμνει την ΑΒ στο Ζ νδο $H\hat{Z}B = \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2}$

④



να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}E$

$\hat{A} = 180° - 68° - 50°$

$\hat{A} = 180° - 118°$

$\hat{A} = 62°$

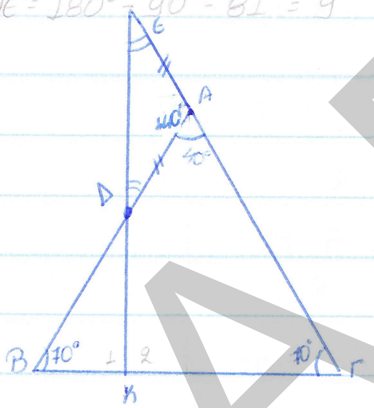
Άρα $\hat{A}_2 = 62° : 2 = 31°$

$E_2 = 180° - 50° - 31° \iff E_2 = 180° - 81° \iff E_2 = 99°$

$E_1 = 180° - E_2 \iff E_1 = 180° - 99° \iff E_1 = 81°$

$\Delta\hat{A}E = 180° - 90° - 81° = 9°$

⑤



να βρεθεί η γωνία $\Delta\hat{K}B$

Εφόσον $\hat{\Gamma}$ είναι 70° και ανήκει στο $A\hat{B}\Gamma$ που είναι ισοσκελές $B = 70°$

$\hat{A}_1 = 180° - 140° \iff \hat{A}_1 = 40°$

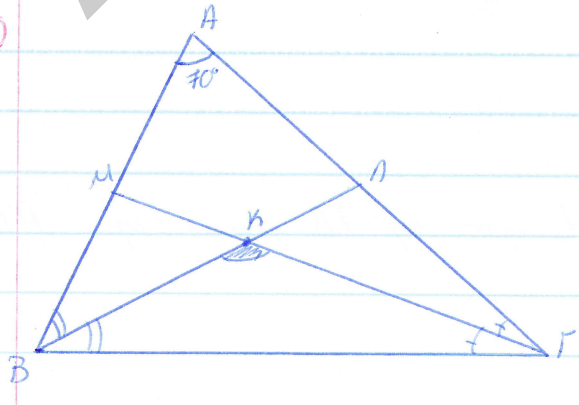
$A_2 = 180° - \hat{A}_1 \iff A_2 = 140°$

Εφόσον στο ΑΔΕ η $\hat{A} = 140°$ και $\Delta = E : 180° - 140° = \frac{40}{2} = 20° = \Delta = E$

Άρα και $\Delta_1 = \Delta_2 = 20$ ως κατακορυφήν

Τελικά $\Delta\hat{K}B = 180° - 70° - 20 = 90°$

⑥



$B\hat{K}\Gamma = ;$

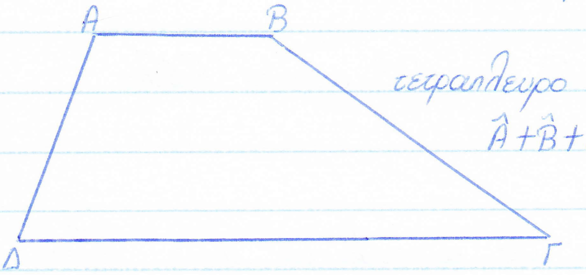
$K \to B_1 + \Gamma_1 \to B + \Gamma$

§4.8 Αθροισμα γωνιων κυρτου ν-γωνου

Ισχυει οτι:

① το αθροισμα των γωνιων ενος κυρτου ν-γωνου (ν = ο αριθμος των πλευρων ή γωνιων του) ισουται με $\boxed{(2\nu-4)\cdot 90^\circ}$ ή αλλιως 2ν-4 ορθες

πχ

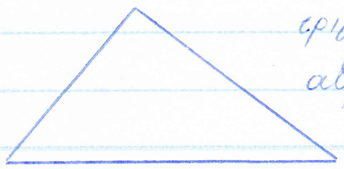


τετραπλευρο

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=(2\cdot 4-4)\cdot 90^\circ=4\cdot 90^\circ=360^\circ$

Super Σημειωσεις

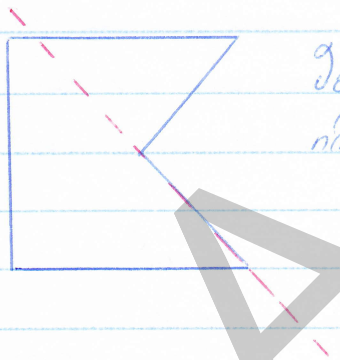
1)



τριγωνο (ν = 3)

αθροισμα γωνιων τριγωνου = $(2\cdot 3-4)\cdot 90^\circ=2\cdot 90^\circ=180^\circ$

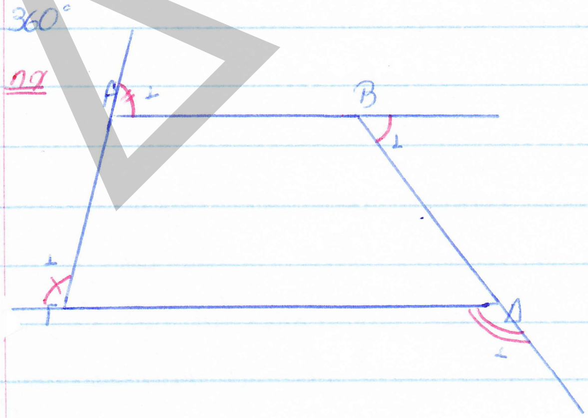
2)



δεν ειναι κυρτο γιατι αν προεκτεινουμε καποια πλευρα του «κοβει» το σχημα στα δυο

② το αθροισμα των εξωτερικων γωνιων ενος κυρτου ν-γωνου ειναι **παντα** 360°

πχ



γιατι: $\hat{A}_1+\hat{A}=180^\circ$

$\hat{B}_1+\hat{B}=180^\circ$

$\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}=180^\circ$

$\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}=180^\circ$ (+)

$(\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1+\hat{\Delta}_1)+360^\circ=720^\circ$

$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1+\hat{\Delta}_1=360^\circ$

5ο κεφαλαιο: Παραλληλογραμμα - Τραπεζια
Διαβασμα και απο τα φυλλαδια

§5.1 Βλεπε βιβλιο σελιδα 102
§5.2 Παραλληλογραμμα (#)
Οι αποδειξεις σελιδα 102 και 103 απο το βιβλιο

Παρατηρηση:
Σε ολα τα σχηματα θα εμφανιζονται τρεις λεξεις «κλειδια»:
• Ορισμος: πως οριζεται ενα σχημα

• Ιδιοτητες: θα γνωριζω το τι ειναι ενα σχημα, αρα θα ισχυει ο ορισμος και ζητααμε το τι αλλο ισχυει για το σχημα αυτο

• Κριτηρια: δεν θα γνωριζω τι ειναι το σχημα μου και ζητω το τι πρεπει να ισχυει, εκτος φυσικα απο τον ορισμο ωστε το σχημα αυτο να ειναι παραλληλογραμμο κλπ

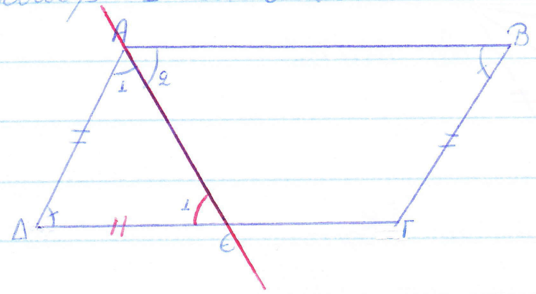
5η κατηγορια: Ασκησεις στα παραλληλογραμμα, ορθογωνια, ...
Παντα θα ξεκινω πρωτα απο την 5η κατηγορια.
Συμβουλη: Σειρα διαβασματος κατηγοριων: 5η, 3η, 1η, 4η, 2η → θα φευγεται απο την αρχη

• Αν ακουσω για παραλληλογραμμο, ορθογωνιο κλπ, σημειωνω στο σχημα μου οσες απο τις ιδιοτητες του μου χρειαζονται

• Υπαρχει περιπτωση να φαινεται καποιο απο τα παραπανω σχηματα χωρις να μου το λεει η ασκηση. Τοτε κοιτω, αν μπορω, να αποδειξω οτι ειναι το σχημα αυτο που φαινεται, (με τη βοηθεια των κριτηριων του ή του ορισμου του). Αν τα καταφερω, τοτε σημειωνω στο σχημα μου οσες απο τις ιδιοτητες του μου χρειαζονται.

Ασκησεις 5ης κατηγοριας

① Επιπεδωσης 1 σελιδα 104



ν.δ.ο $ΔΕ = ΒΓ$

Ειναι ΑΒΓΔ # αρα $ΑΔ = ΒΓ$ ①

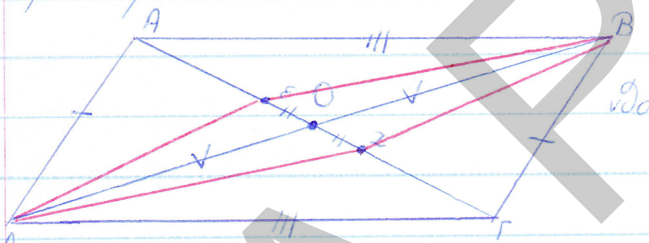
Επισης η $ΑΒ // ΓΔ$ που τεμνονται απο την ΑΕ

Αρα: $\hat{Α}_2 = \hat{Ε}_1$ (ως εντος εναλλαξ) } $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$ → επομενως ΑΔΕ ισοσκελες

Ομως $\hat{Α}_2 = \hat{Α}_1$ αρα $ΑΔ = ΔΕ$ ②

Απο ①, ② εχω $ΔΕ = ΒΓ$

② Επιπεδωσης 2 σελιδα 104



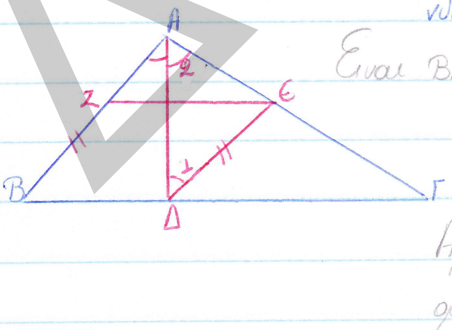
$ΟΕ = ΟΖ$

ν.δ.ο ΒΕΔΖ #

ΑΒΓΔ #, αρα $ΒΟ = ΟΔ$ } ΒΕΔΖ #

Ομως $ΕΟ = ΟΖ$

③ Επιπεδωσης 4 σελιδα 104



ν.δ.ο $ΑΕ = ΒΖ$

Ειναι ΒΔΖΕ # γιατι $ΖΕ // ΒΔ$

$ΕΔ // ΖΒ$

$ΑΒ // ΔΕ$ τεμνονται ΑΔ

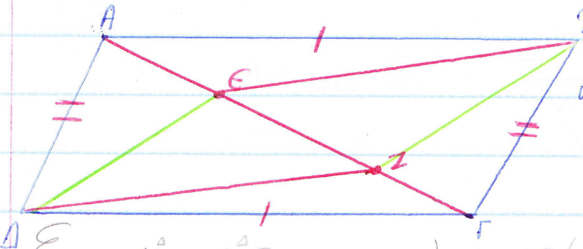
Αρα $\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_1$ (Εντος Εναλλαξ) } $\hat{Δ}_1 = \hat{Α}_2$

ομως $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$

Αρα ΑΕΔ ισοσκελες δηλ $ΑΕ = ΔΕ$ } $ΑΕ = ΒΖ$, αποδειχτ.

ομως $ΔΕ = ΒΖ$

4 αποδεικτ. 2 σελίδα 105



$\Delta Z \parallel BE$

ν.δ.ο. $\Delta E \parallel BZ$

Είναι $\Delta\hat{\Gamma}Z = A\hat{E}B$ γιατί: 1) $\Delta\Gamma = AB$ (από δεδομ.)

2) $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ)

3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (γωνίες με πλ. παρ.