

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΓΕΛ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**Ε.2 Σύνολα****Σύνολα αριθμών**

01 Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε με το σύμβολο " $\sqrt{}$ " εκείνα τα τετράγωνα των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

	$\in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{R}$
0,5				
1926				
$\sqrt{2}$				
-4				
$\frac{6}{3}$				
$-\sqrt{9}$				
3,14				
π				
$\frac{2}{5}$				

Παράσταση συνόλου

02 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\}$

β. $B = \left\{x \in \mathbb{Z} / -\frac{5}{2} < x \leq 3\right\}$

γ. $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / -2 \leq x < 1\}$

δ. $\Delta = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$

ε. $E = \{x \in \mathbb{R} / (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) = 0\}$

Ισότητα συνόλων - Υποσύνολα

03 Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 2\}$$

$$\Gamma = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{Z} / (x-1) \cdot (x-2) = 0\}$$

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα

" $=$ ", " $\subseteq$ ", " $\supseteq$ "

α. $A \dots B$

β. $A \dots \Gamma$

γ. $A \dots \Delta$

δ. $B \dots \Gamma$

ε. $B \dots \Delta$

στ. $\Gamma \dots \Delta$

Πράξεις συνόλων

04 Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{-3, -1, 0\}$$

$$\Gamma = \{1, 3, 4\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$

β. $A \cap \Gamma$

γ. $(A \cup \Gamma) \cap B$

δ. $(A \cap B) \cup \Gamma$

05 Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο Ω το σύνολο των αριθμών ενός ζαριού από τάβλι και τα υποσύνολα

$$A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}$$

$$B = \{x \in \Omega / x \text{ περιττός}\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cup B$

β. $A \cap B$

γ. A'

δ. B'

06 Έστω $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 4\}$ και δύο υποσύνολά του

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ διαιρέτης του } 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ πολλαπλάσιο του } 2 \text{ και } x < 6\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α. $A \cap B$

β. $B' \cap A$

γ. $A' \cup B$

07 Έστω $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota\}$ και δύο υποσύνολά του

$$A = \{\beta, \gamma, \delta, \epsilon\} \text{ και } B = \{\delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α. $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$ Τι παρατηρείτε;

β. $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$ Τι παρατηρείτε;

Διαγράμματα Venn

08 Να παραστήσετε σε διαγράμματα Venn τα σύνολα Ω , A και B των ασκήσεων **06** και **07**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

Παραστάσεις

01 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $6 - (1 - 2) + 4 \cdot (-2 + 3)$

β. $2 + 3 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-4)$

γ. $-2 - 3 \cdot [5 + 3 \cdot (6 - 2 \cdot 5)]$

02 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1 - \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{2}{5}$

β. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

γ. $\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{2 - \frac{1}{2}}} - 1$

03 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x - (x - y) + 4(x + 2y) - 8y$

β. $x(2 - y) - y(4 - x) - 2(-x)$

γ. $x - [3x - 2[y + 2(x - 3y)] + 4y]$

04 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = 3(x - y) - 2(2x + 2y) + 3(3x + 3y)$, για $x = 0,2$ και $y = 0,5$

β. $B = 2[x(y - 1) - y(x - 2)] + 3(x - y)$, για $x = 7,5$ και $y = 2,5$

γ. $\Gamma = 2x - 2[-3x - (2x + y)] + 2$, για $6x + y = -1$

Αντίθετοι - Αντίστροφοι

05 Να βρείτε τους αντίθετους και τους αντίστροφους των αριθμών:

$$\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, 2, -3, 1$$

06 Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β με

$$\alpha = 2(x + y) + 3(y - z)$$

$$\beta = 5(x - y) - 7(x + z) + 10z$$

είναι αντίθετοι.

07 Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β με

$$\alpha = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ και } \beta = \frac{y}{1 + \frac{y}{x}}$$

είναι αντίστροφοι.

08 Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι, να δείξετε ότι

$$2(\alpha - 3\beta) - 5[\beta(\alpha - 1) - 1] - \alpha(3 - 5\beta) = 5$$

09 Αν οι αριθμοί $\alpha - \frac{1}{2}, \beta - 2$ είναι αντίστροφοι,

να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y με

$$x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4} \text{ και } y = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}(1 - \alpha)$$

είναι αντίθετοι.

Άρτιοι - Περιττοί

10 Να διακρίνετε τους παρακάτω αριθμούς σε άρτιους και περιττούς.

$$2, 7, -1940, -1821, 2k + 1, 2k, 10k, 2k + 3, k \in \mathbb{Z}^*$$

11 Να δείξετε ότι το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος.

12 Να δείξετε ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών είναι περιττός.

Αναλογίες

13 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \frac{3\alpha + 8\beta}{5\beta}$

β. $B = \frac{3(\beta - \alpha)}{6\alpha}$

γ. $\Gamma = \frac{10\beta + \alpha}{7\alpha - 2\beta}$

14 Αν $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{3}{2}$, να βρείτε το λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$

15 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ανάλογοι των αριθμών 2, 3, 5 και $\beta+\gamma=5$, να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ .

16 Αν $\frac{3\alpha+2\beta}{\alpha-\beta} = \frac{5\beta+3\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{2\gamma+5\alpha}{\gamma-\alpha}$, να δείξετε ότι $8\alpha+7\beta+5\gamma=0$

Αυτάματα

17 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = 3^2 + (-2)^3 - (-1)^4 + (-2^4)$

β. $B = 1^{1972} - (-1)^{1974} + (-1)^{2001} - (-1)^{2003} + (-1^{2017})$

γ. $\Gamma = 4 \cdot (-5)^2 + (-4)^3 - (-7) \cdot 3^2$

18 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = -[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2] : (-2)^4$

β. $B = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + (-2)^2}{-[-(-1)^{1912}]}$

γ. $\Gamma = \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - (-4)^2$

19 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} - (-3)^{-2}$

β. $B = \frac{2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3}{\pi^0}$

γ. $\Gamma = \left[(-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot 2^{-2}\right] : \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

20 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x(x^2-1) - x(x-1) \cdot (x+2) + 2(x^2+3)$

β. $\frac{x^{-2}(x^3+x^2) + x^2(x^{-1}-x^{-2})}{x^4(x^{-4}-x^{-3})-1}$

γ. $\frac{3x^2y^{-1} - 4x^{-3}y}{x^{-2}y}$

21 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x^2(xy^2)^3 : (x^2y^3)^2$

β. $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2y^2}{5x^3}\right)^{-1} \cdot (-2x^{-1}y^4)^{-1}$

γ. $\left(\frac{2x}{3z}\right)^{-2} \cdot \frac{4x^3}{2xz} \cdot \left(-\frac{2y}{5z}\right)^3$

22 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = \frac{(x^2y^{-1})^5}{(xy^{-2})^{-5}}$, για $x=3$ και $y=\frac{3}{10}$

β. $B = \left[(x^3y)^4 \cdot (x^3y^2)^{-2}\right] \cdot \left(\frac{y^3}{x}\right)^{-3}$, για

$x=3$ και $y=\frac{1}{3}$

γ. $\Gamma = \left(\frac{6xyz}{xy+yz+zx}\right)^{-2}$, για $x=10^{-1} : 10^{-3}$,
 $y=10^{-5} : 10^{-7}$ και $z=10^{-1} \cdot 1000$

Ταυτότητες

23 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(x-3)^2 - 3(3-x^2)$

β. $(x^2-y)^2 + (x-y) \cdot (x+y)$

γ. $(x+2)^2 + 2(x^2-4) + (x-2)^2$

δ. $(x-y) \cdot (x+y) \cdot (x^2+y^2)$

ε. $(3x-1)^3 - (2x+1)^2 - (1+3x)^3$

στ. $(x+2y)^3 - (2x-y)^3 - (x-y)^2 \cdot (x+y)$

24 Να δείξετε ότι:

α. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

β. $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

γ. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

25 Να δείξετε ότι:

α. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$$\beta. (x+y)^3 - (x-y)^3 = 6x^2y + 2y^3$$

$$\gamma. (x+y)^2 - (x-y)^2 + (x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2 + 4xy$$

$$\delta. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$\epsilon. \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\sigma\tau. (x^2-1) \cdot (y^2-9) + (3x-y)^2 = (xy-3)^2$$

26 i. Να δείξετε ότι

$$\alpha^2 - (\alpha - 1000) \cdot (\alpha + 1000) = 10^6$$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης
 $2018^2 - 1018 \cdot 3018$

27 i. Να δείξετε ότι

$$(\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha^2 + 1) \cdot (\alpha^4 + 1) = \alpha^8 - 1$$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης
 $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 1001$

28 Αν $\alpha - \beta = 2$, να δείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 4\alpha + 4\beta + 3 = -1$$

29 Αν $x + \frac{1}{x} = \alpha$, να δείξετε ότι:

$$\alpha. x^2 + \frac{1}{x^2} = \alpha^2 - 2$$

$$\beta. x^3 + \frac{1}{x^3} = \alpha^3 - 3\alpha$$

$$\gamma. x^4 + \frac{1}{x^4} = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$$

30 Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$\alpha^4(3 - 2\alpha^2) + \beta^4(3 - 2\beta^2)$$

είναι ανεξάρτητη των α και β .

31 Να δείξετε ότι:

$\alpha.$ ο αριθμός $2018^2 - 9$ διαιρείται με το 5

$\beta.$ ο αριθμός $499^3 + 501^3$ διαιρείται με το 10

Παραγοντοποίηση

32 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha. 3x^3 - 27x$$

$$\beta. 9(2x-1)^2 - 4$$

$$\gamma. x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$$

$$\delta. x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\epsilon. x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\sigma\tau. x^2 - 3x + 2$$

33 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha. \frac{x^2 - x}{x^3 - 4x} \cdot \frac{x^4 - 16}{x^3 - x}$$

$$\beta. \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^3 - 3} \cdot \frac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$$

$$\gamma. \frac{10x^2 - 5x}{1 + 4x + 4x^2} : \frac{25x}{8x^2 - 2}$$

$$\delta. \frac{x^2y^2 - y^4}{x^3 + y^3} : \frac{xy^2 + y^3}{x^2 - xy + y^2}$$

34 Να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^3 - \beta^3} : \left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} + 2 \right) = \frac{1}{2(\alpha + \beta)}$$

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Αποδεικτικές

01 Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

$$\beta. (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq 0$$

$$\gamma. \alpha^2 + \beta^2 \geq 12\alpha + 4\beta - 40$$

$$\delta. (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) \geq 2\beta(3\alpha - 5\beta)$$

$$\epsilon. (\alpha^2 + 1) \cdot (\beta^2 + 4) \geq (\alpha\beta + 2)^2$$

$$\sigma\tau. \alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta \geq 0$$

Πότε ισχύει η ισότητα των παραπάνω σχέσεων;

02 Να δείξετε ότι:

$$\alpha. -\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\beta. -\frac{1}{4} \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^4 + 4} \leq \frac{1}{4}$$

03 Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \alpha^2 + 6\alpha + 10 > 0$$

$$\beta. 2\alpha^2 - 2(\alpha - 1) > 1$$

Αποδεικτικές με συνθήκη

04 Να δείξετε ότι:

α. $|\alpha - 1| - |1 - \alpha|$

β. $|\alpha - 2| \cdot |2 - \alpha|$

γ. $|\alpha - |\alpha|| - ||-\alpha| - \alpha|$

δ. $\frac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} + \frac{|\beta - \gamma|}{|\gamma - \beta|} + \frac{|\gamma - \delta|}{|\delta - \gamma|} + \dots + \frac{|\psi - \omega|}{|\omega - \psi|}$

04 Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε, χωρίς απόλυτες τιμές, τις εκφράσεις των παρακάτω παραστάσεων:

α. $A = 3x - |x + 1| + 1$

β. $B = |x - 1| + |2x - 2| + |3 - 3x|$

γ. $\Gamma = |2x - 1| - 3|x + 2| + 5x - 4$

δ. $\Delta = |x| - |2 - x| + |x + 1|$

Αποδεικτικές

05 Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του α .

α. $A = 2|\alpha + 2| - |\alpha - 1| + 3|\alpha - 2|$, αν $-2 < \alpha < 1$

β. $B = |\alpha^2 - 1| + |\alpha - 1|^2 - |1 - 2\alpha|$, αν $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

γ. $\Gamma = |\alpha^2 - 4\alpha + 4| + |\alpha| \cdot |\alpha - 4|$, αν $0 < \alpha < 4$

δ. $\Delta = (|\alpha| - \alpha) \cdot \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + 1 \right)$, αν $\alpha \neq 0$

06 Να δείξετε ότι:

α. αν $x = \frac{\alpha}{|\alpha| + |\beta|}$ και $y = \frac{\beta}{|\alpha| + |\beta|}$ ($\alpha\beta \neq 0$), τότε

$|x| + |y| = 1$

β. αν $\left| \frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right| = 2$ ($\alpha\beta \neq 0$), τότε

α, β είναι ομόσημοι

07 Να δείξετε ότι:

α. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$

β. $|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2$, $\alpha \neq 0$

γ. $\frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} \leq \alpha$

δ. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$, $\alpha, \beta \neq 0$

ε. $\alpha|\beta| + |\alpha|\beta \leq \alpha\beta + |\alpha\beta|$

στ. $\frac{\alpha}{|\alpha|} + 2\frac{\alpha + 2}{|\alpha + 2|} + 3\frac{1 - \alpha}{|\alpha - 1|} \leq 6$, $\alpha \neq -2, 0, 1$

08 Να δείξετε ότι:

α. $|\alpha + \beta + \gamma| \leq 10$, αν $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$, $|\gamma| = 5$

β. $|3\alpha^2 - 4\alpha + 1| \leq 8$, αν $|\alpha| = 1$

γ. $|\alpha + \beta - 4| \leq 6$, αν $|\alpha - 1| \leq 4$ και $|\beta - 3| \leq 2$

δ. $|\alpha - \beta| \leq 4$, αν $|\alpha - 1| \leq 1$ και $|\beta - 1| \leq 3$

ε. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, αν α, β ομόσημοι

στ. $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta|$, αν α, β ετερόσημοι

Απόσταση δύο αριθμών

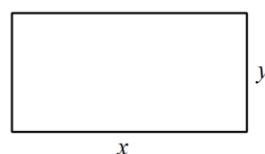
09 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 2 \leq 1$	$d(x, 2) \leq 1$	$[1, 3]$
$ x - 3 < 2$		
$ x + 3 \geq 2$		
	$d(x, 1) \leq 1$	
	$d(x, -3) < 4$	
		$(-2, 4)$
		$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

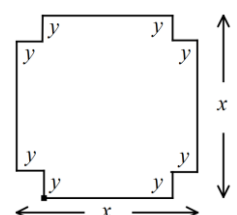
Προβλήματα

10 Αν $|x - 1| < 0,2$ και $|y - 2| < 0,1$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:

i.



ii.



2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Υπολογισμοί - Πράξεις

01 Να υπολογίσετε τις ρίζες:

- α. $\sqrt{49}$ β. $\sqrt{8100}$
 γ. $\sqrt{0,0004}$ δ. $\sqrt[3]{125}$
 ε. $\sqrt[4]{81}$ στ. $\sqrt[5]{32}$

02 Να κάνετε τις πράξεις:

- α. $\sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$
 β. $(3\sqrt{5} - \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$
 γ. $(\sqrt{112} - \sqrt{7} + \sqrt{48}) \cdot (\sqrt{63} - \sqrt{48})$
 δ. $(\sqrt{12} - 3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{18})$

03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- α. $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$
 β. $\sqrt[3]{5 + \sqrt{7 + \sqrt[4]{16}}}$
 γ. $\sqrt[7]{4 - \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{121}}}$

04 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α. $A = \sqrt{4\alpha} - \sqrt{16\alpha} + \sqrt{9\alpha}$
 β. $B = \sqrt{45\alpha^3} - \sqrt{80\alpha^3} + \sqrt{5\alpha}$
 γ. $\Gamma = \sqrt{\alpha^2\beta} - \sqrt{9\alpha^2\beta} + \alpha\sqrt{\beta}$
 δ. $\Delta = \sqrt{4\alpha^2\beta} + 6\sqrt{\alpha^2\beta} - 7\alpha\sqrt{\beta}$

05 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α. $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$, αν $0 < x < 1$
 β. $B = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{16 - 8x + x^2}$, αν $1 < x < 4$
 γ. $\Gamma = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, αν $|x - 1| < 2$

Αποδεικτικές

06 Να δείξετε ότι:

- α. $\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 2$
 β. $\sqrt{(\sqrt{5} + 3)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = 2\sqrt{5}$

07 Να δείξετε ότι:

- α. $(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2}) \cdot (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}) = 6$
 β. $(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}) \cdot (\sqrt{5-x} - \sqrt{x+3}) = -2x + 2$

08 Να δείξετε ότι:

- α. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{5}{2}$
 β. $\frac{1}{(3 - \sqrt{7})^2} - \frac{1}{(3 + \sqrt{7})^2} = 3\sqrt{7}$

09 Να δείξετε ότι:

- α. $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta}}\right) \cdot (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) = \beta - \alpha$
 β. $\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \beta}$

Ιδιότητες ριζών

10 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- α. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{6}} - 2 \cdot \sqrt{\sqrt{6}} + 2$
 β. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5} + 1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3} + 1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5} - 1}$
 γ. $\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{5 + 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{5 - 3\sqrt{2}}$

11 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α. $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$
 β. $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}}$
 γ. $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[5]{25 \cdot \sqrt{25 \cdot \sqrt{5}}}}$
 δ. $\sqrt{\alpha \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3}}$

12 Να βρείτε τα εξαγόμενα:

- α. $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$
 β. $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4}$
 γ. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{16}$
 δ. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[5]{\alpha^2} : \sqrt[15]{\alpha^2}$

Ρητοποίηση παρονομαστών

13 Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

$$\beta. \frac{14\sqrt{32}}{\sqrt{98}} = 8$$

14 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

$$\alpha. \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta. \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma. \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\delta. \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

15 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

$$\alpha. \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

$$\beta. \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\gamma. \frac{1}{3\sqrt{2}-4}$$

$$\delta. (2\sqrt{5}-3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^{-1}$$

16 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

$$\alpha. \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$$

$$\beta. \frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$\gamma. \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{10}}$$

$$\delta. \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

17 Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$$

Υπολογισμός ριζών

18 Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$(3+\sqrt{2})^2 \text{ και } (3-\sqrt{2})^2$$

και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 6$$

19 Αν $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$, να υπολογίσετε το A^2 και στη συνέχεια την τιμή του A .

20 Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$\sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$$

είναι φυσικός.

Ανισοτικές σχέσεις

21 Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

$$\beta. \sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt{6} + 1$$

$$\gamma. \sqrt{6+2\sqrt{6}} > \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

22 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha. \sqrt{7} \text{ και } \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\beta. \sqrt{2} - 1 \text{ και } \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\gamma. \sqrt[4]{4} \text{ και } \sqrt[5]{5}$$

23 Για τους θετικούς αριθμούς α, β , να δείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta$$

$$\beta. (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \cdot (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$$

$$\gamma. \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Βασικές μορφές

01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. 3(x-2) - 4(x+5) = 10(x+4)$$

$$\beta. \frac{x-1}{3} = \frac{4x+2}{14}$$

$$\gamma. \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{x-5}{4}$$

$$\delta. \frac{x}{3} - \frac{2x-3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon. -\frac{1-3x}{5} + \frac{2(1+3x)}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\sigma\tau. \frac{2(1-5x)}{5} - \left(x - \frac{6x-1}{2}\right) = -1$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε 1ου βαθμού**02** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 - 2x = 0$

β. $x^2 + 10x + 25 = 0$

γ. $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

δ. $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

03 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 = 0$

β. $(x+1) \cdot (x-2) - (x+3) \cdot (x-2) = 0$

γ. $(x^2 - 16) \cdot (3x - 1) = (x + 4) \cdot (3x - 1)^2$

δ. $1 - 4x^2 - 4(2x - 1) = 0$

Κλασματικές**04** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{x+2}$

β. $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$

γ. $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2$

δ. $\frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{1}{2}$

05 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-1}{x^2-4}$

β. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{3}{(x-2) \cdot (3-x)} = \frac{x+2}{x-3}$

γ. $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

δ. $\frac{x^2-1}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x}$

Παραμετρικές**06** Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. $(\lambda + 2)x = \lambda - 2$

β. $(\lambda^2 - 9)x = \lambda + 3$

γ. $2(\lambda - 1) \cdot (x - 1) - \lambda(x - 2) = 2\lambda + 3$

δ. $\lambda^2(x - 1) = x(2\lambda - 1) - 3\lambda + 2$

07 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 16)x = \lambda^2 + 4\lambda$$

i. να είναι ταυτότητα

ii. να είναι αδύνατη

iii. να έχει μοναδική λύση

08 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση:

α. $(2\lambda - 1) \cdot (x - 2) - 5 = (\lambda + 1) \cdot (x - 2) - 2\lambda$ να

είναι αδύνατη

β. $\frac{\lambda}{2}x - 2 + 2\lambda = \frac{\lambda^2}{2} + x$ να είναι αόριστη

γ. $\lambda^2x - \lambda(x - 1) = 5$ να έχει μοναδική λύση

δ. $\lambda x + 5\lambda = \lambda^2 + 2x + 6$ να έχει μοναδική ρίζα το 1

ε. $\lambda x + 5\lambda = \lambda^2 + 2x + 6$ να έχει ρίζα το 1

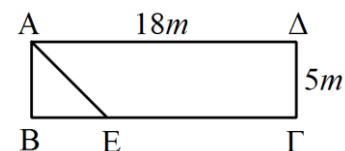
09 Να δείξετε ότι αν η εξίσωση

$$\lambda^2(x - 1) = x(2 - \lambda) - 1$$

είναι ταυτότητα, τότε η εξίσωση

$$\lambda^2x - 1 = \lambda(x + 1)$$

είναι αδύνατη.

Προβλήματα**10** Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του σχήματος με διαστάσεις 5m και 18m, να βρείτε τη θέση του σημείου Ε, ώστε το εμβαδόν του ΑΔΓΕ να είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του ΑΒΕ.**11** Ένα βαρέλι Α περιέχει 524 κιλά κρασί των 2€ το κιλό κι ένα βαρέλι Β περιέχει 456 κιλά κρασί των 1,5€ το κιλό.

Αφαιρούμε από κάθε βαρέλι την ίδια ποσότητα κρασιού και την τοποθετούμε στο άλλο βαρέλι.

Αν η συνολική αξία των κρασιών παραμένει ίδια, να βρείτε πόσα κιλά κρασιού μεταφέρθηκαν από το ένα βαρέλι στο άλλο.

12 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11.

Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του προκύπτει αριθμός κατά 45 μικρότερος.

Να βρείτε τον αρχικό αριθμό.

13 Αναμειγνύουμε 1,5ℓ κρασί περιεκτικότητας 12% σε οινόπνευμα, με 1ℓ κρασί περιεκτικότητας 11% σε οινόπνευμα.

Πόσο % σε οινόπνευμα περιέχει το μείγμα;

Με απόλυτες τιμές

14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|2x+1|=5$

β. $|2x+1|=-5$

γ. $|2x+1|=0$

15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|x|=|2x+3|$

β. $|4x-3|-2|x+1|=0$

γ. $|3x-2|=\sqrt{4x^2-4x+1}$

δ. $|x^2-1|=-|x^2-x|$

16 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2|x|-5-(4|x|-3)=7|x|-1$

β. $\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{2} = \frac{|x|+2}{4}$

γ. $\frac{|x|}{2} + 1 = \frac{|2x|}{3}$

δ. $3|x|+|-x|=6+|2x|$

17 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{|x+2|}{2} = 5 - \frac{|x+2|}{3}$

β. $\frac{2|2x-1|+1}{3} - \frac{|2x-1|-1}{2} = \frac{1}{2}$

γ. $\frac{|x-1|+4}{3} - \frac{|1-x|+4}{5} = \frac{2}{3}$

δ. $\frac{|x-2|}{2} + 1 = \frac{|4-2x|}{3}$

18 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|x+2| \cdot |2x-3| = |x+2|$

β. $\left| \frac{x-1}{x-2} \right| = 2$

γ. $||x|-3|=1$

δ. $||7-|2x-3||-4|=6$

19 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|x+5|=3x-1$

β. $2|x+1|-3(1-x)=2$

γ. $\frac{|3x-1|+2}{3} = 1-x$

δ. $|x-2|-|3-x|+x=1$

3.2 Η Εξίσωση $x^n=a$

01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^4-1=0$

β. $x^6+2018=0$

γ. $x^3-1000=0$

δ. $2018x^{2019}+2018=0$

02 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2x^6+4x^2=0$

β. $2x^7-128x=0$

γ. $4x^4-32x=0$

δ. $x^{10}+243x^5=0$

03 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(x^2-1)^3=27$

β. $256\left(x^3+\frac{1}{8}\right)^4-1=0$

γ. $(|x|+2)^5+64(|x|+2)^2=0$

δ. $(|x-1|-3)^{10}=16(|x-1|-3)^6$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Ελλιπής μορφή

01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2-1,96=0$

- β. $10x^2 - 5 = 0$
 γ. $4x^2 + 16 = 0$
 δ. $3x^2 - 9x = 0$

Πλήρης μορφή

02 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α. $x^2 - x - 6 = 0$
 β. $x^2 - 1,5x - 1 = 0$
 γ. $9x^2 + 6x + 1 = 0$
 δ. $-4x^2 + 12x - 9 = 0$
 ε. $2x^2 + x + 1 = 0$
 στ. $2x(x - 3) = -4 - x^2$

03 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α. $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$
 β. $4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
 γ. $2x^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
 δ. $6x^2 - 3(\sqrt{2} - 2)x - \sqrt{18} = 0$

Παραμετρικές

04 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α. $2x^2 + ax - a^2 = 0$
 β. $a^2x(x - 2a) = 1 - a^4, a \neq 0$
 γ. $4x^2 - 2(\alpha + 2\beta)x + \alpha\beta + \beta^2 = 0$
 δ. $x^2 - \frac{\alpha - \beta}{2}x - \frac{\alpha\beta}{4} = 0$
 ε. $x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0$
 στ. $x^2 - 2x + 3 + \alpha^4 = 0$

05 Να βρείτε το πλήθος ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

- α. $x^2 + (4\alpha + 3)x + 6\alpha = 0$
 β. $x^2 + 2(1 - 2\alpha)x + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$
 γ. $x(x + \alpha - 1) = \alpha(x - \alpha) - 1$
 δ. $x^2 + 2(\alpha - 3)x + \alpha^2 + 3 = 0$

06 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο πραγματικές ρίζες άνισες.

α. $x^2 + ax - \frac{1}{4} = 0$

β. $ax^2 + 4x - \alpha + 2 = 0, \alpha \neq 0$

07 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες.

α. $2x^2 + 3ax - a^2 = 0$

β. $x^2 - \alpha(x + 1) - 1 = 0$

08 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η εξίσωση

$$x^2 - 2x + \lambda - 8 = 0$$

- i. να έχει ρίζα το 2
 ii. να έχει πραγματικές ρίζες
 iii. να έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες
 iv. να έχει μία ρίζα
 v. να μην έχει ρίζες

09 Να λύσετε την εξίσωση

$$(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda + 1)x - \lambda = 0$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

10 Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, ώστε η εξίσωση

$$2x(x + 1) = \kappa - x^2$$

να έχει διπλή ρίζα και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη ρίζα αυτή.

11 Να δείξετε ότι, αν η εξίσωση

$$(2\alpha + \beta)x^2 + 4\alpha x - 4\beta = 0$$

έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 3x + 2(\alpha + \beta) = 0$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες.

12 Να δείξετε ότι αν η εξίσωση

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$$

έχει πραγματικές ρίζες, τότε το ίδιο συμβαίνει και για την εξίσωση

$$ax^2 + 2(\alpha + \beta)x + \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0, \alpha \neq 0$$

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

13 Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων (χωρίς να τις λύσετε):

α. $x^2 - 5x + 6 = 0$

β. $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\gamma. x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$$

$$\delta. \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$$

14 Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i. } x_1 + x_2$$

$$\text{ii. } x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii. } x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv. } x_1^3 + x_2^3$$

$$\text{v. } x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$$

$$\text{vi. } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$\text{vii. } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

15 Να βρείτε τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού που έχουν για ρίζες τους αριθμούς:

$$\alpha. -3 \text{ και } 1$$

$$\beta. 4 \text{ και } \frac{3}{2}$$

$$\gamma. \frac{3-\sqrt{2}}{2} \text{ και } \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

16 Αν οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

είναι x_1 και x_2 , να βρείτε την εξίσωση τριωνύμου που έχει ρίζες τα ζεύγη:

$$\text{i. } x_1 + 2 \text{ και } x_2 + 2$$

$$\text{ii. } x_1^2 - 1 \text{ και } x_2^2 - 1$$

$$\text{iii. } x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ και } x_2 + \frac{1}{x_1}$$

17 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + (\lambda - 2)x + 2(\lambda - 4) = 0$$

είναι:

$$\text{i. αντίθετες}$$

$$\text{ii. αντίστροφες}$$

$$\text{iii. ετερόσημες}$$

$$\text{iv. ομόσημες}$$

$$\text{v. θετικές}$$

$$\text{vi. αρνητικές}$$

18 Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η μία ρίζα της εξίσωσης

$$x^2 + \lambda x + 8 = 0$$

ισούται με το τετράγωνο της άλλης;

19 Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + 2\lambda = 0$$

έχει δύο ρίζες από τις οποίες η μία είναι τριπλάσια της άλλης;

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

20 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{x-10}{x} = -\frac{3}{x-2}$$

$$\beta. 4x + \frac{15}{2x+4} = 3$$

$$\gamma. \frac{4}{2x-x^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\delta. \frac{1-x^2}{4x^2-1} + \frac{5x-4}{2x+1} = \frac{8-x}{1-2x}$$

21 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\beta. x^4 + 6x^2 - 40 = 0$$

$$\gamma. 2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$$

$$\delta. 8x^6 - 15x^3 - 2 = 0$$

22 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. x^2 + 2|x| - 3 = 0$$

$$\beta. (3x-2)^2 - 2 = |2-3x|$$

$$\gamma. (x+2)^2 + 3\sqrt{x^2+4x+4} + 2 = 0$$

$$\delta. x^2 - 6x + 4|6-2x| = 0$$

23 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. (6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0$$

$$\beta. 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 6 = 0$$

$$\gamma. \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

$$\delta. x^2 + \frac{4}{x^2} + 6\left(x + \frac{2}{x}\right) = 23$$

Προβλήματα

24 Δίνεται ορθογώνιο με εμβαδόν 120cm^2 .

Όταν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά 3cm και η άλλη ελαττωθεί κατά 2cm , το εμβαδόν του δε μεταβάλλεται.

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

25 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς αριθμούς, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να ισούται με 74.

26 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα.

Επειδή απουσίαζαν δύο υπάλληλοι, οι υπόλοιποι υποχρεώθηκαν να συσκευάσουν τρία προϊόντα παραπάνω.

Πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Βασικές μορφές

01 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $5(2-x) > 13-3(x+1)$

β. $\frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 1 + \frac{x-3}{4}$

γ. $\frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{2} < \frac{5x}{6}$

δ. $\frac{3x+1}{3} - \frac{3-4x}{4} \leq 2x + \frac{1}{2}$

02 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α. $3(x+2) < x-4$ και $3x+2 \geq 5x-6$

β. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \geq -1$ και $1 + \frac{4x+2}{2} \geq \frac{2(x-1)}{3}$

γ. $\frac{x-2}{3} + \frac{7}{6} \leq \frac{x-5}{4}$ και $1-x \leq \frac{7}{12}$

δ. $\frac{3x+2}{4} < x-1 \leq \frac{2-x}{3}$

ε. $\frac{3x-1}{2} < 3x+2 < \frac{6x+5}{2}$

στ. $\frac{1-2x}{2} \leq \frac{x}{6} < \frac{2x+9}{3} - \frac{x}{2} - 5$

03 Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α. $8x-3(x+1) > 7x+5$ και $\frac{x}{6} + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{3} - 2$

β. $\frac{3}{4} < x - \frac{x-1}{2} < \frac{1-x}{3} + 3$

Παραμετρικές

04 Να λύσετε τις ανισώσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. $\lambda(x-1) > \lambda(\lambda-1)$

β. $\lambda(x-1) \geq x + \lambda(\lambda-2)$

γ. $\lambda(x+\lambda) - 4(2-x) \leq 2(x-2)$

δ. $\frac{\lambda(x-1)}{3} < \frac{x-\lambda}{4} - \frac{x+2}{6}$

Με απόλυτες τιμές

05 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x+1| < 2$

β. $|4x-2| \geq 10$

γ. $|x+6| \leq -3$

δ. $|x+3| < 0$

ε. $|x-2019| \leq 0$

στ. $|2x+5| > -1$

ζ. $|4-x| \geq 0$

η. $|10-5x| > 0$

06 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $3(|x|+1) + 2|x| \geq 15 - |x|$

β. $3(4|x-2|+1) < 8(2|x-2|-3) + 7$

γ. $\frac{7|x-1|+4}{5} \geq \frac{3|1-x|-5}{2} + |x-1|$

δ. $\frac{|2x-1|-3}{2} - \frac{|1-2x|-4}{3} > 1 + \frac{|2x-1|-5}{4}$

ε. $\frac{|x|+3}{2} - \frac{|2x|+2}{3} \leq |-x|-5$

στ. $8 + \frac{4 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{2} > |6-2x|$

07 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

α. $2 \leq |x-3| \leq 6$

β. $\frac{1}{2} \leq \left| x + \frac{3}{2} \right| < \frac{5}{2}$

γ. $-1 \leq |2x+1| \leq 9$

δ. $0 < |3-6x| < 3$

08 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x| - 11 \leq 2$

β. $|3x - 1| + 1 < 8$

γ. $|x - 2| - 3 \geq 4$

δ. $|4 - |x - 1|| \leq 12$

09 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x - 3| < |x + 2|$

β. $|2x - 1| \leq |3 + 2x|$

10 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x + 2| \leq x$

β. $|x - 3| > 2 + 3x$

γ. $2|x| + 3|x - 1| > 5x - 2$

δ. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} < 4$

Προβλήματα

11 Η αντοχή μιας γέφυρας είναι $8t$. Ένα φορτηγό με απόβαρο $3t$ είναι φορτωμένο με σωλήνες που ο καθένας ζυγίζει $200kg$.

Πόσους σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό, ώστε να περάσει τη γέφυρα με ασφάλεια;

12 Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία πλατεία με εμβαδόν μεταξύ $110m^2$ και $125m^2$. Το μήκος της πλατείας είναι $15m$.

Μεταξύ ποιων ορίων θα περιέχεται το πλάτος της πλατείας;

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Παραγοντοποιήσεις

01 Να παραγοντοποιήσετε όσα από τα παρακάτω τριώνυμα μπορούν να παραγοντοποιηθούν.

α. $x^2 + 4x - 21$

β. $-3x^2 + 2x + 1$

γ. $4x^2 - 12x + 9$

δ. $x^2 + 2x + 3$

02 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $2x^2 - 3ax - 2a^2$

β. $(\alpha + 1)x^2 + x - \alpha$

γ. $x^2 + (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})x + \sqrt{\alpha\beta}$

δ. $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$

Απλοποιήσεις

03 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$

β. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

γ. $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

δ. $\frac{3x^2 - 13x + 4}{9x^2 - 6x + 1}$

04 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{x^2 - ax - 2a^2}$

β. $\frac{x^2 - ax + \beta x - \alpha\beta}{x^2 + ax - 2a^2}$

γ. $\frac{2a^2 + \alpha\beta - \beta^2}{a^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2}$

δ. $\frac{\alpha^3 - \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2}{\alpha^4 + \alpha\beta^3}$

Εύρεση πρόσημου

05 Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

α. $x^2 - 5x + 6$

β. $-2x^2 + 3x + 2$

γ. $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$

δ. $-4x^2 - x + \frac{1}{2}$

ε. $16x^2 + 24x + 9$

στ. $-x^2 - 7x - 13$

06 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:

α. $(x - 1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$

β. $(2 - x) \cdot (x^2 - 2x - 3)$

γ. $(2x + 1) \cdot (4x^2 - 1) \cdot (-x^2 + x + 2)$

δ. $(2 - 3x) \cdot (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x + 1)$

$$\varepsilon. (x+1) \cdot (-x^2 + 4x - 4) \cdot (x^2 - 3x - 4)$$

$$\sigma\tau. (x+2)^{2019} \cdot (x+3)^{2018} \cdot (2x^2 + x - 10)^{2017}$$

Ανισώσεις

07 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. x^2 < 1$$

$$\beta. 9x^2 - 4 \leq 0$$

$$\gamma. x^2 - 25 > 0$$

$$\delta. 25(x-1)^2 - 16 \geq 0$$

$$\varepsilon. x^2 + 9 \leq 6x$$

$$\sigma\tau. x^2 + 4 > 4x$$

$$\zeta. x^2 + 9 > 0$$

$$\eta. 3x^2 + 4 < 0$$

08 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. x^2 - x > 0$$

$$\beta. 2x^2 - 4x \leq 0$$

$$\gamma. x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

$$\delta. -x^2 + 7x - 12 < 0$$

$$\varepsilon. x^2 + x + 100 \leq 0$$

$$\sigma\tau. -x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

09 Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha. x^2 - 14x + 45 > 0 \text{ και } x^2 - 14x + 24 \geq 0$$

$$\beta. x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} \geq 0 \text{ και } 2x^2 - 5x - 12 < 0$$

$$\gamma. 2x^2 + 5x > 0 \text{ και } 25 - x^2 > 0$$

$$\delta. x^2 < 16, x^2 > 3x \text{ και } x^2 > 4x - 4$$

10 Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha. x < x^2 - 2 < x + 4$$

$$\beta. x - 4 < x(x - 4) \leq 5$$

$$\gamma. 3 \leq x^2 + 2x < -x(x - 6)$$

$$\delta. x^2 - 9 \leq 2(3 - x) \leq -2x(2x + 1) + 7$$

Ανισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

11 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. x^4 - 5x^2 + 4 < 0$$

$$\beta. x^4 - 8x^2 - 9 \geq 0$$

$$\gamma. x^2 - 4|x| + 3 \leq 0$$

$$\delta. (2x - 1)^2 - 8|1 - 2x| + 15 > 0$$

$$\varepsilon. |x - 3| \geq 2|x + 1|$$

$$\sigma\tau. |x^2 - x + 1| < |x^2 - 3x + 4|$$

$$\zeta. |x - 1| < x(2 - x) - 5$$

$$\eta. |x^2 - 4x + 3| > x(2x - 1) - 1$$

Ανισώσεις γινομένων

12 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. (x - 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 25) > 0$$

$$\beta. (2 - x) \cdot (2x^2 + 4x) \cdot (x^2 + 2) \geq 0$$

$$\gamma. (2 + x - x^2) \cdot (x^2 + 4x + 4) \leq 0$$

$$\delta. (x^2 - 4) \cdot (-x^2 + 3x - 2) < 0$$

$$\varepsilon. (x + 6)^2 \cdot (x^2 + 5)^3 \cdot (x^2 - 49)^4 \geq 0$$

$$\sigma\tau. (7 - x)^3 \cdot (-2x^2 + 8x)^4 \cdot (x^2 - 4x - 5)^5 \leq 0$$

Κλασματικές

13 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. \frac{x-3}{x+2} > 0$$

$$\beta. \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3} \leq 0$$

$$\gamma. \frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 + 1} \geq 1$$

$$\delta. \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$$

$$\varepsilon. \frac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \frac{1}{x-3}$$

$$\sigma\tau. \frac{3}{2+x} - \frac{4x}{4-x^2} \geq \frac{2}{x-2}$$

Παραμετρικές

14 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda^2 = 0$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

15 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 3)x - \lambda + 3 = 0$$

i. να είναι αδύνατη

ii. να έχει δύο πραγματικές ρίζες

iii. να έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες

16 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η εξίσωση:

$$\alpha. 2x^2 - \lambda(10x - 7) - 1 = 0 \text{ να είναι αδύνατη}$$

β. $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$ να έχει δύο πραγματικές ρίζες

γ. $\lambda x^2 + \lambda x + 2\lambda x + 5 + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

17 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για όλες τις πραγματικές τιμές του x .

α. $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$

β. $(\lambda + 1)x^2 + 2(2\lambda - 1)x + 5\lambda + 1 < 0$, $\lambda \neq -1$

γ. $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda \leq 0$, $\lambda \neq -2$

δ. $(\lambda - 2)x^2 - (2 - \lambda)x - 1 \geq 0$, $\lambda \neq 2$

18 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες το τριώνυμο

$$\lambda x^2 + 4x + \lambda + 3$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Αποδεικτικές

19 Να δείξετε ότι:

α. $x^2 + 2x - 4 - 3x(x - 1) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $-x^2 - (\lambda - 2)x - \lambda^2 + \lambda - 2 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. $2x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ. $x^2 + (\lambda - x)\lambda > 2(x - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Προβλήματα

20 Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους;

21 Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ώστε η περίμετρός του να είναι $20m$ και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον $16m^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

01 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

α. $\alpha_v = v \cdot (v - 1)$

β. $\alpha_v = \frac{1}{v^2}$

γ. $\alpha_v = (-1)^v \cdot v^2$

δ. $\alpha_v = \frac{2v - 3}{v + 1}$

ε. $\alpha_v = 1 + (-1)^v$

στ. $\alpha_v = |2v - 1| - v$

02 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

α. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{v+1} = \alpha_v - 2$

β. $\alpha_1 = -3$, $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = 4$

γ. $\alpha_1 = -1$, $\alpha_{v+1} = \alpha_v^3$

δ. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{v+1} = 3\alpha_v - 4$

03 Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

α. $\alpha_v = v - 5$

β. $\alpha_v = 2v + 1$

γ. $\alpha_v = 3^v - 1$

δ. $\alpha_v = 3 \cdot 2^v + 1$

04 Να βρείτε το v^o όρο των ακολουθιών:

α. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{v+1} = \alpha_v + 4$

β. $\alpha_1 = -2$, $\alpha_{v+1} = -3\alpha_v$

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

Εύρεση $n^{\text{ου}}$ όρου

01 Να βρείτε το v^o όρο των αριθμητικών προόδων:

α. 3, 10, 17, ...

β. -5, 0, 5, ...

γ. 12, 7, 2, ...

02 Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις αριθμητικές προόδους:

α. τον 21^ο όρο της 3, 7, 11, ...

β. τον 51^ο όρο της -3, -11, -19, ...

γ. τον 100^ο όρο της $\frac{4}{3}, 4, \frac{20}{3}, \dots$

03 Ο 3^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 5 και ο 10^{ος} όρος της είναι 47.

Να βρείτε τον 1^ο όρο, τη διαφορά και τον 21^ο όρο της προόδου.

Ποιος όρος της προόδου ισούται με 173;

04 Ο ν^{ος} όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 10 - 7n$.

Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον 1^ο όρο της, τη διαφορά και τον 16^ο όρο.

Ποιος όρος της προόδου ισούται με -74;

Διαδοχικοί όροι

05 Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των:

α. 20 και -20

β. -7 και 13

γ. -6 και -15

06 Να βρείτε το x , ώστε οι παρακάτω αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

α. $3x, x+4, x-1$

β. $x-2, x^2+1, x^2-5x$

γ. $3x-2, x^2-11, 4-x$

Άθροισμα διαδοχικών όρων

07 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 όρων των αριθμητικών προόδων:

α. -2, 1, 4, ...

β. 3, -2, -7, ...

γ. -3, 1, 5, ...

08 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $8+11+14+\dots+158$

β. $7+10+13+\dots+157$

γ. $27+19+11+\dots-53$

09 Να βρείτε το άθροισμα όλων των άρτιων που περιέχονται μεταξύ των αριθμών 11 και 55.

10 Να βρείτε πόσους όρους της αριθμητικής προόδου 3, 5, 7, ... πρέπει να προσθέσουμε, για να έχουμε άθροισμα 168.

11 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 5, 8, 11, ...

Να βρείτε πόσους όρους το λιγότερο πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα μεγαλύτερο του 671.

Προβλήματα

12 Ένας αγρότης, για να κάνει μια γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου τα εξής:

Το 1^ο μέτρο θα κοστίσει 6€ και αυξανόμενου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 2€. Ο αγρότης διαθέτει 750€.

Σε πόσο βάθος μπορεί να φτάσει η γεώτρηση στο κτήμα του;

13 Μια ομάδα στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα έτσι, ώστε στην πρώτη σειρά να στέκεται ένας στρατιώτης και σε κάθε επόμενη σειρά να στέκονται δύο στρατιώτες περισσότεροι από την προηγούμενη.

Αν στην τελευταία σειρά στέκονται 99 στρατιώτες, να βρείτε:

i. πόσες σειρές σχηματίστηκαν

ii. πόσοι είναι όλοι οι στρατιώτες

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

Εύρεση ν^{ου} όρου

01 Να βρείτε το ν^ο όρο των γεωμετρικών προόδων:

α. 3, 9, 27, ...

β. 4, -8, 16, ...

γ. $-\frac{28}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{7}{3}, \dots$

02 Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις γεωμετρικές προόδους:

α. τον 7^ο όρο της 3, 6, 12, ...

β. τον 5^ο όρο της $3, 2, \frac{4}{3}, \dots$

γ. τον 6^ο όρο της $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots$

03 Ο 4^{ος} όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι $\frac{3}{2}$

και ο 7^{ος} όρος της είναι $\frac{32}{9}$.

Να βρείτε τον 1^ο όρο, το λόγο και τον 11^ο όρο της προόδου.

Ποιος όρος της προόδου ισούται με 2;

04 Ο $n^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τον 1^ο όρο της, το λόγο και τον 5^ο όρο.

Ποιος όρος της προόδου ισούται με -6144;

Διαδοχικοί όροι

05 Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των:

α. 2 και 128

β. 3 και $\frac{4}{3}$

γ. $3\sqrt{2} + 4$ και $3\sqrt{2} - 4$

06 Να βρείτε το x , ώστε οι παρακάτω αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α. $x + 4, 2 - x, 6 - x$

β. $5x - 9, 2x + 3, 3x - 1$

γ. $3x^2 - 2, 2 - 3x^2, x^2 - 1$

Άθροισμα διαδοχικών όρων

07 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 5 όρων των γεωμετρικών προόδων:

α. 8, 16, 32, ...

β. 4, -2, 1, ...

γ. $-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots$

08 Να κάνετε τις πράξεις:

α. $1 + 2 + 4 + \dots + 256$

β. $2 - \frac{1}{2} + 1 - \dots + \frac{1}{72}$

γ. $-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 + \dots + 2187$

09 Να βρείτε το λόγο της γεωμετρικής προόδου που έχει για πρώτο όρο της το 7 και άθροισμα των τριών πρώτων όρων ίσο με 91.

10 Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των δύο πρώτων όρων είναι 48 και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων είναι 60.

Προβλήματα

11 Μια μπάλα πέφτει από ύψος $2m$ και κάθε φορά που χτυπά στο έδαφος χάνει 20% της αρχικής της ενέργειας.

Αν δεν υπάρχουν άλλες απώλειες να υπολογίσετε το ύψος της μπάλας μετά την 6^η αναπήδηση.

12 Ένας παππούς αποφάσισε να αποταμιεύσει κάποια χρήματα προκειμένου να κάνει ένα δώρο στον εγγονό του όταν θα αποφοιτήσει σε ένα χρόνο από το Λύκειο.

Σκέφτηκε να αποταμιεύει την πρώτη ημέρα κάθε εβδομάδας 0,10€ και κάθε επόμενη ημέρα μέχρι το τέλος της εβδομάδας το διπλάσιο ποσό.

Πόσα χρήματα θα πάρει ο εγγονός του την ημέρα της αποφοίτησης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

Τιμές συνάρτησης

01 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x - 3$$

Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-3)$ και $f(0)$

02 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = x^3 - 3x$$

Να βρείτε τις τιμές $g(1)$, $g(3)$ και $g(-2)$

03 Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$$

Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(2)$ και $h(-4)$

04 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & , \text{αν } x \leq 2 \\ \sqrt{x+3} - x & , \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(6)$ και $f(2)$

05 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $g(-1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$ και $g(-\sqrt{3})$

06 Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $h(-2,5)$, $h(\pi)$ και $h(0,4)$

07 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

Να βρείτε τα $f(x+1)$, $f(-x)$ και

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

08 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x(x+1) \cdot (x-1)$$

Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 0$$

09 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = x(3-x)$$

Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει

$$g(x) = 2$$

10 Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = -\frac{12}{x^2 + 2}$$

Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$h(x) = -2$$

11 Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

«Σκέψου έναν αριθμό, πρόσθεσε 2, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 5 και από το γινόμενο αφαίρεσε 4».

i. Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις

τιμές της για $x=0$, $x=1$ και $x=-\frac{1}{5}$

ii. Να βρείτε τους αρνητικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$f(x) = x^2$$

Πεδίο ορισμού

12 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

β. $g(x) = x^3 - \frac{x+1}{3}$

γ. $h(x) = x^2 - \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{6}$

13 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{4}{2x-5}$

β. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

γ. $f(x) = \frac{x+5}{|x|-1} - \frac{x+6}{x^2-3x-10}$

δ. $f(x) = \frac{-x+1}{x^2-x+1} + 2x$

ε. $f(x) = \frac{x}{|x|-x}$

στ. $f(x) = \frac{1}{x^3-9x} + \frac{4x}{x^2+4x+4} - 10$

14 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{3x-15}$

β. $f(x) = \sqrt{x+2} - 2x\sqrt{3-2x}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2-25} + \sqrt{10-|x|}$

δ. $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} + 3x\sqrt{x^2-2x+1}$

ε. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{2} + \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{3}$

στ. $f(x) = \sqrt[4]{2-\sqrt{x+3}}$

15 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

$$\beta. f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{2}{3x^2 - 12} + \sqrt{|x| + x}$$

$$\delta. f(x) = \frac{\sqrt{3 - 9x}}{-3x^2 + 5x - 3}$$

$$\epsilon. f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2} - \frac{x-2}{x+3}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} + \frac{4}{\sqrt{x^3 + x}}$$

16 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & x \geq 1 \\ \sqrt{3-2x}, & x < 1 \end{cases}$$

$$\beta. g(x) = \begin{cases} x+1, & x < -2 \\ x^2 - x, & -2 < x < 3 \\ x^3 + 3x, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Γενικές

17 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
- Να βρείτε τις τιμές $f(3)$, $f(-1)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$

18 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = -\frac{3}{2}$$

- Να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f(f(x)) = x$$

19 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

τέτοια, ώστε $f(-3) = 12$

- Να βρείτε την τιμή του α
- Να δείξετε ότι $f(2) + 100f(-1) = f(0)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 5$

20 Δίνεται η συνάρτηση

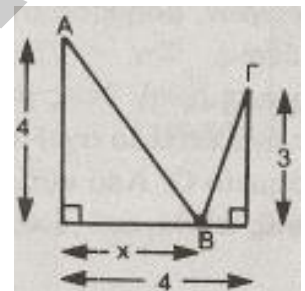
$$f(x) = \frac{4x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 - 2}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Η τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ ισούται με 12.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να δείξετε ότι $\alpha = -16$
- Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
- Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) \geq 16$

Προβλήματα

21 Αν $0 \leq x \leq 4$, να εκφράσετε το μήκος $(AB) + (BG)$ ως συνάρτηση του x .



22 Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους $100m$, μία ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος). Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x .

23 Σύρμα μήκους $\ell = 20cm$ κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη xcm και $(20-x)cm$.

Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο.

Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x .

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

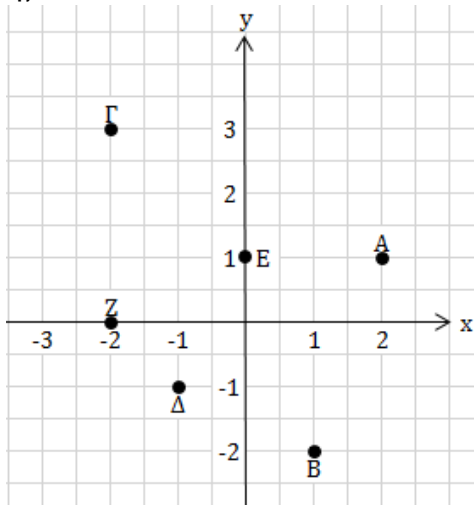
Συντεταγμένες σημείων

01 Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

$$A(3,1), B(0,2), \Gamma(-2,2),$$

$\Delta(-1,0)$, $E(-1,-2)$, $Z(1,-3)$

02 Να γράψετε τις συντεταγμένες των παρακάτω σημείων:



03 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν τα παρακάτω σημεία βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

- α. $A(3, 2\lambda - 1)$
- β. $B(2, \lambda^2 - 4)$
- γ. $\Gamma(-1, 2\lambda^3 + 16)$

04 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν τα παρακάτω σημεία βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

- α. $A(3 + \lambda, 5)$
- β. $B\left(\frac{\lambda - 2}{4}, 4\right)$
- γ. $\Gamma(3|\lambda| - 36, -2)$

Σημεία γραφικών παραστάσεων

05 Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-3,1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων:

- α. $f(x) = 2x + 7$
- β. $g(x) = \frac{3x + 5}{5 - x}$
- γ. $h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \geq 1 \\ x^3 - 9x + 1, & x < 1 \end{cases}$

06 Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο M να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- α. $f(x) = x^2 - 3x - \kappa$ $M(4,3)$
- β. $g(x) = \kappa x^2 + \kappa^2 x + 2$ $M(-2,2)$
- γ. $h(x) = \kappa \sqrt{x^3 - 2} - |1 - 3x|$ $M(3,-3)$

07 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

να διέρχεται από το σημείο:

- α. $A(\lambda, 6)$
- β. $B(-4, 2|\lambda| + 1)$
- γ. $\Gamma(\lambda - 1, 2\lambda)$

08 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^3 - (\alpha + 1)x^2 - \beta x - 2$$

διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-1, 3)$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Συμμετρικά σημεία

09 Να βρείτε το συμμετρικό σημείο των

$A(3,4)$ και $B(2,-5)$

- i. ως προς τον άξονα $x'x$
- ii. ως προς τον άξονα $y'y$
- iii. ως προς τη διχοτόμο της γωνίας xOy
- iv. ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

Κοινά σημεία - Σχετικές θέσεις

10 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

- α. $f(x) = x^2 + x - 2$
- β. $f(x) = 4 + x^2$
- γ. $f(x) = \frac{2x - 15}{x + 3}$
- δ. $f(x) = 2x\sqrt{x + 2}$
- ε. $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$$\sigma\tau. f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 18, & x > 2 \\ \sqrt{4-x} + 1, & x \leq 2 \end{cases}$$

11 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 5x$$

βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

12 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = |3 - 2x| - 5$$

δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

13 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

α. $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = x + 11$

β. $f(x) = x^2 - x + 2$ και $g(x) = 4 - x$

γ. $f(x) = x^3 + 5$ και $g(x) = x + 5$

δ. $f(x) = (x - 2)^2$ και $g(x) = x^2 + 1$

ε. $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$ και $g(x) = x + 2$

στ. $f(x) = 2x^2 - 1$ και $g(x) = x^2 + 5x - 5$

14 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 + 8x - 12$$

βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = -x^2 + 2x + 8$$

15 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

δε βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = |1 - x| + 3$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

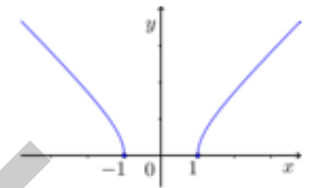
16 Να εξετάσετε κατά πόσο οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Στην περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

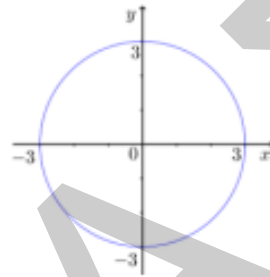
α.



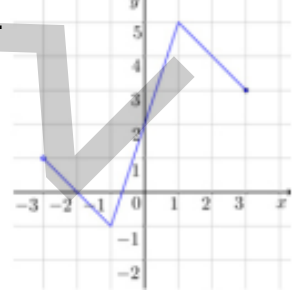
γ.



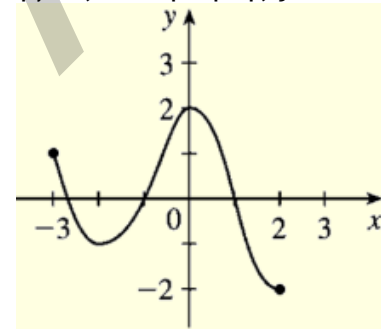
β.



δ.



17 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(x) = 0$

ii. την ανίσωση $f(x) > 0$

iii. την ανίσωση $f(x) \leq 0$

Απόσταση σημείων

18 Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

α. $A(1,0)$ και $B(1,-4)$

β. $A(1,-1)$ και $B(-7,5)$

γ. $A(-3,-2)$ και $B(2,-14)$

δ. $A(3,1)$ και $B(-3,-1)$

19 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η απόσταση των σημείων $A(3,2)$ και $B(\lambda,-1)$ να ισούται με 5 μονάδες.

20 Να βρείτε το είδος του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία:

α. $A(2,0)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(-2,4)$

β. $A(-3,3)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(3,1)$

6.3 Η Συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

Γραφική παράσταση

01 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=2$

β. $f(x)=-4$

γ. $f(x)=x$

δ. $f(x)=-x$

ε. $f(x)=2x$, $x \geq 0$

στ. $f(x)=-3x$, $-1 \leq x < 1$

02 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες:

$$y = -2x + 1, \quad y = -2x + \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2}x - 3$$

Τι θέση έχουν οι ευθείες μεταξύ τους;

03 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \leq 1 \\ -2x+2 & , x > 1 \end{cases}$

β. $g(x) = \begin{cases} x+2 & , x \leq 0 \\ -x-1 & , x > 0 \end{cases}$

γ. $h(x) = \begin{cases} x+1 & , x < -1 \\ 2 & , x = -1 \\ -x & , x > -1 \end{cases}$

δ. $q(x) = \begin{cases} -2x & , x \leq -2 \\ 6 & , -2 < x < 3 \\ 2x & , x > 3 \end{cases}$

04 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=|x+1|$

β. $g(x)=2|x-1|+3$

γ. $h(x)=\frac{|x|-x}{2}$

δ. $q(x)=|x-2|+|x+2|$

Κλίση ευθείας

05 Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες:

α. $y=100$

β. $y=x+4$

γ. $y=-x-4$

δ. $y=\sqrt{3}x+3,14$

ε. $y=-\frac{3}{\sqrt{3}}x+2,72$

στ. $x-\sqrt{3}y+1=0$

06 Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α. $A(1,2)$ και $B(3,4)$

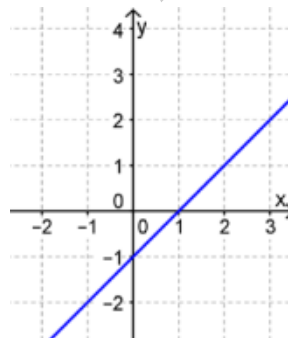
β. $A(4,3)$ και $B(1,6)$

γ. $A(-2,1)$ και $B(-1,-5)$

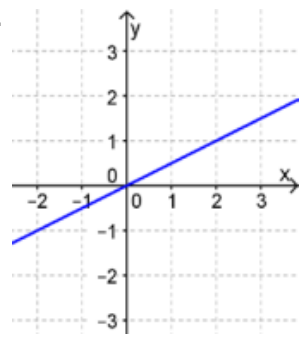
δ. $A(0,3)$ και $B(4,3)$

07 Να βρείτε την κλίση για καθεμία από τις παρακάτω ευθείες:

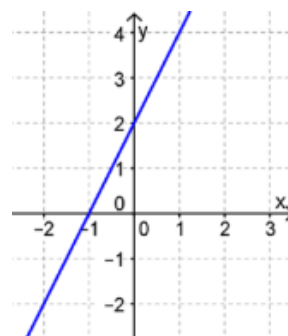
α.



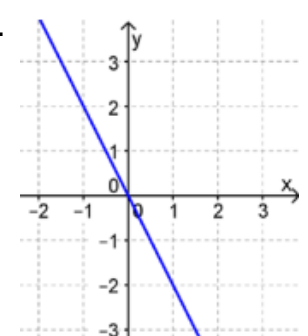
γ.



β.



δ.



08 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η ευθεία

$$y = (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + 3$$

να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$:

i. οξεία γωνία

- ii. αμβλεία γωνία
- iii. γωνία ίση με 45°
- iv. μηδενική γωνία

09 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε οι παρακάτω ευθείες να είναι παράλληλες.

- α. $y = \lambda^2 x + 5$ και $y = (5\lambda - 6)x + 8$
- β. $y = (\lambda^3 - 1)x + 80$ και $y = 3\lambda(\lambda - 1)x - 8$
- γ. $y = (|\lambda + 1| - 2)x$ και $y = 4$
- δ. $x + 5y = 0$ και $x + \lambda^2(y - 1) + y = 1$

Εύρεση εξίσωσης ευθείας

10 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:
α. έχει κλίση $\alpha = 2$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$

β. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° και διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$

γ. είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x - 4$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(5, 0)$

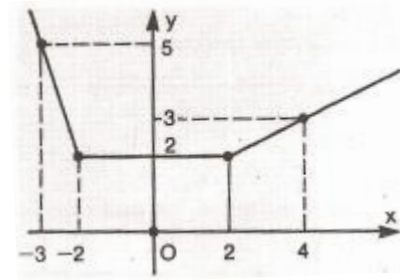
11 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 1)$ και:

- α. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -5$
- β. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60°
- γ. είναι παράλληλη στη διχοτόμο του $2^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου

12 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

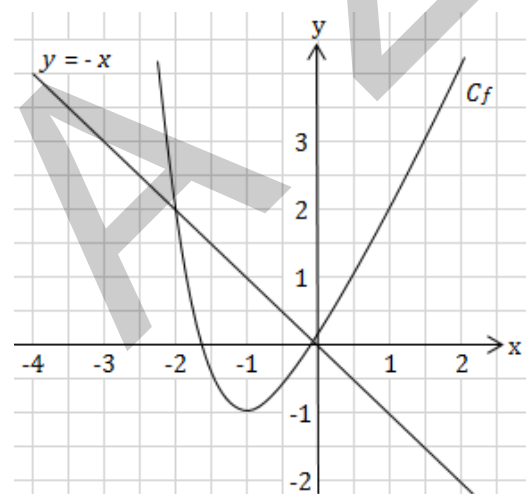
- α. $O(0, 0)$ και $B(1, 2)$
- β. $A(3, 1)$ και $B(1, -1)$
- γ. $A(3, 1)$ και $B(1, 3)$
- δ. $A(-3, 3)$ και $B(3, 3)$

13 Να βρείτε τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γραφική επίλυση εξισώσεων - ανισώσεων

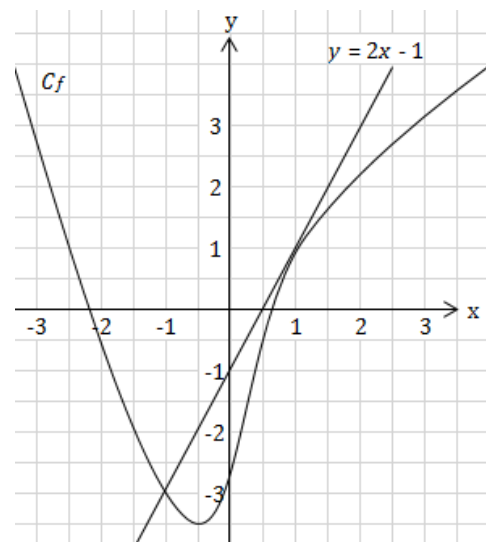
14 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και της ευθείας $y = -x$



Να λύσετε γραφικά:

- i. τις εξισώσεις $f(x) = 2$ και $f(x) = -x$
- ii. τις ανισώσεις $f(x) \geq 2$ και $f(x) < -x$

15 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και της ευθείας $y = 2x - 1$



Να λύσετε γραφικά:

- i. τις εξισώσεις $f(x)=1$ και $f(x)=2x-1$
- ii. τις ανισώσεις $f(x)>1$ και $f(x)<2x-1$

16 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή της άσκησης **13**, τότε να λύσετε γραφικά:

- i. τις εξισώσεις $f(x)=2$ και $f(x)=1$
- ii. τις ανισώσεις $f(x)>x$ και $f(x)\leq -x$

(Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα)

Προβλήματα

17 Μια εταιρεία παραγωγής φυσικών χυμών έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό πορτοκάλια που παίρνει από τον παραγωγό, παράγει $0,4\ell t$ χυμό.

- i. Πόσα λίτρα χυμού θα παραχθούν με $500kg$ πορτοκάλια;
- ii. Να εκφράσετε με τύπο την ποσότητα $f(x)$ του χυμού (σε λίτρα) που παράγεται, ως συνάρτηση της ποσότητας x (σε κιλά) των πορτοκαλιών που χρειάζονται.
- iii. Πόσα κιλά πορτοκάλια πρέπει να χρησιμοποιήσει η εταιρεία, ώστε η παραγωγή σε χυμό να είναι $300\ell t$;

18 Μια εταιρεία τηλεπικοινωνιών χρεώνει τη σταθερή γραμμή τηλεφώνου σε κάθε νοικοκυριό με πάγιο τέλος 15€ το μήνα. Χρεώνει, επίσης, τις κλήσεις προς 1 λεπτό το κάθε λεπτό ομιλίας. Να βρείτε έναν τύπο που να υπολογίζει τη μηνιαία χρέωση της εταιρείας για μια σταθερή γραμμή σε κάποιο νοικοκυριό.

19 Μια δεξαμενή έχει όγκο $4m^3$ και είναι γεμάτη μέχρι τη μέση με νερό. Μια αντλία παροχής νερού αρχίζει να τη γεμίζει με ρυθμό $15\ell t$ ανά λεπτό. Να εκφράσετε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x)=ax^2$

Γραφικές παραστάσεις

01 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$ και $h(x)=3x^2$

β. $f(x)=-x^2$, $g(x)=-2x^2$ και $h(x)=-3x^2$

γ. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ και $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$

Τι παρατηρείτε;

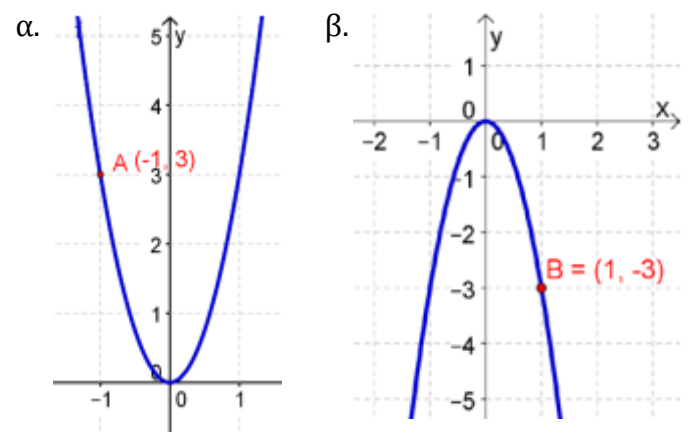
02 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

β. $g(x)=\begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -\frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$

γ. $h(x)=2x \cdot |x|$

03 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή των παρακάτω σχημάτων:



Γραφική επίλυση εξισώσεων - ανισώσεων

04 Αφού πρώτα χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2x^2 \text{ και } g(x) = 8$$

να λύσετε γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. τις ανισώσεις $f(x) < g(x)$ και $f(x) \geq g(x)$

(Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα)

05 Αφού πρώτα χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = -x^2 \text{ και } g(x) = x - 2$$

να λύσετε γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. τις ανισώσεις $f(x) \leq g(x)$ και $f(x) > g(x)$

(Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα)

06 Αφού πρώτα χαράξετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 3x^2 \text{ και } g(x) = 2x - 1$$

να λύσετε γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. τις ανισώσεις $f(x) > g(x)$ και $f(x) < g(x)$

(Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα)

Μελέτη συνάρτησης

07 Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = (2k + 1)x^2$$

να είναι παραβολή και:

α. να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 5)$

β. να παρουσιάζει ελάχιστο

γ. να παρουσιάζει μέγιστο

08 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και το ακρότατο τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = 2018x^2$

β. $g(x) = -2019x^2$

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

Γραφικές παραστάσεις

01 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - x - 6$

β. $g(x) = -x^2 + 2x - 2$

γ. $h(x) = 4x^2 + 4x + 1$

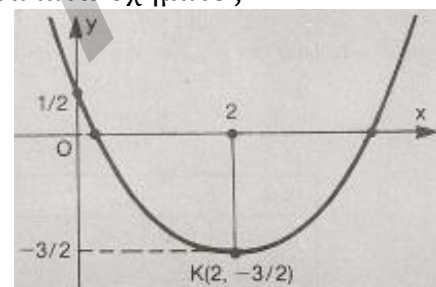
δ. $q(x) = |x^2 - 2x|$

02 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1 \text{ και } h(x) = (x + 1)^2$$

Τι παρατηρείτε;

03 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή του παρακάτω σχήματος.

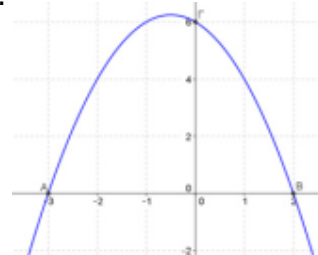


Γραφική ερμηνεία

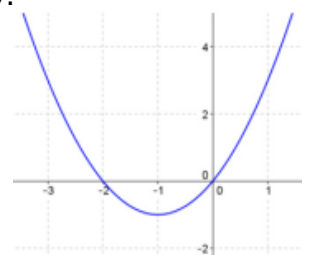
04 Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

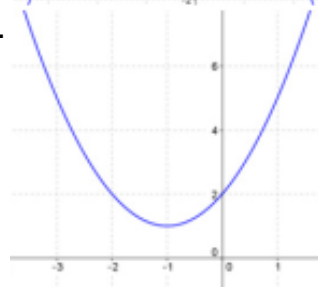
α.



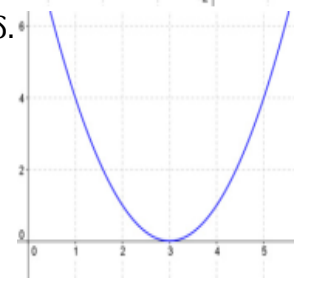
γ.



β.



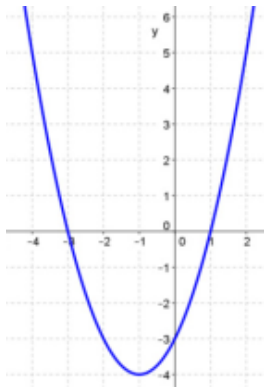
δ.



Να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$

05 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x)=ax^2+bx+c$$



Να βρείτε:

- το πρόσημο του a
- την τιμή του c
- το σύνολο τιμών της f
- τον άξονα συμμετρίας της f
- το ελάχιστο ή το μέγιστο της καμπύλης
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$

Μελέτη συνάρτησης.

06 Να βρείτε τον τύπο της παραβολής

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 1 και -3 , ενώ τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

07 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+\lambda x+\lambda+1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

- να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$
- να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$
- να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία

08 Για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών k και λ , η συνάρτηση

$$f(x)=kx^2+(\lambda-3)x+2k^2-1$$

έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-1$ και ελάχιστη τιμή το 8;

09 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2x^2+4x$$

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f(C_f)$
- Να εξετάσετε τη μονοτονία και το ακρότατο της συνάρτησης f
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

10 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=-2x^2+6x-5$$

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $g(C_g)$
- Να εξετάσετε τη μονοτονία και το ακρότατο της συνάρτησης g
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

11 Δίνεται η συνάρτηση

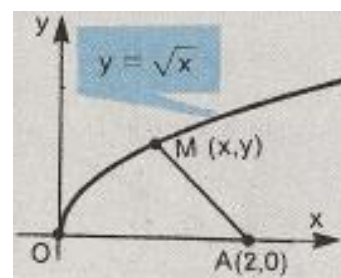
$$h(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $h(C_h)$
- Να εξετάσετε τη μονοτονία και το ακρότατο της συνάρτησης h
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_h με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της h

Προβλήματα

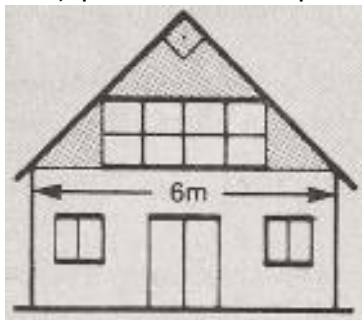
12 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η καμπύλη

$$y=\sqrt{x}$$



Να βρείτε εκείνο το σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης που απέχει από το σημείο $A(2, 0)$ την ελάχιστη απόσταση, η οποία και να βρεθεί.

13 Στην πρόσοψη της σκεπής ενός ορεινού καταφυγίου, θέλουμε να ανοίξουμε ορθογώνιο παράθυρο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του παραθύρου, ώστε το δώμα να δέχεται το μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό;

14 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.