ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ ΛΑΘΩΝ ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΣΕ ΜΙΑ ΛΥΣΗ

ΑΝΤΩΝΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ
Μαθηματικός- Συγγραφέας- Πρώην μέλος του Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε.- Πρώην πρόεδρος της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού της Ε.Μ.Ε., «Ευκλείδης Β΄»

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Πωλ Χάλμος (PAUL HALMOS) σε ένα άρθρο του, στο γνωστό μαθηματικό περιοδικό: «THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY» (τόμος 87, αριθμός 7) γράφει: **« Η καρδιά των Μαθηματικών είναι τα προβλήματα και οι λύσεις, και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».** Βέβαια, για να λύση ένας ένα πρόβλημα, πρώτα απ' όλα θα πρέπει να γνωρίζει πολύ καλά τη θεωρία στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα. Μετά, θα πρέπει να ξέρει πως θα εργασθεί για να λύσει το πρόβλημα. Δεν εννοώ υποδείξεις του τύπου: «κατανόησε το πρόβλημα», «να έχεις στο μυαλό σου συνεχώς τα δεδομένα και τα ζητούμενα» κ.τ.λ. Πάνω σε αυτά ο POLYA, λίγο πριν από τα μέσα του περασμένου αιώνα (το 1944), είχε γράψει ένα ολόκληρο βιβλίο με τίτλο: «Πώς να το λύσω». Αλλά ο ίδιος στο βιβλίο του αυτό (σελίδα 22, εκδόσεις Σπηλιώτη) γράφει: **«Οι υποδείξεις αυτές είναι φυσικές, απλές, προφανείς και βασίζονται στην κοινή λογική και ένας, που ενδιαφέρεται σοβαρά να λύσει ένα πρόβλημα, αυτά οπωσδήποτε θα τα σκεφτεί μόνος του, χωρίς καμία συμβουλή».** Με αυτά δεν θέλω να πω ότι το βιβλίο αυτό του POLYA είναι άχρηστο. Αντίθετα, το συνιστώ ανεπιφύλακτα, γιατί γράφει πολύ χρήσιμα πράγματα. Γράφει επίσης και μερικές αλήθειες τις οποίες συνήθως τις λέμε χαμηλόφωνα. Για παράδειγμα στη σελίδα 144 γράφει: **«Οι κανόνες διδασκαλίας είναι δύο:**

- **Ο πρώτος κανόνας είναι να γνωρίζετε εκείνο που πρόκειται να διδάξετε.**
- **Ο δεύτερος κανόνας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από εκείνα που πρόκειται να διδάξετε».**

Συμφωνώ απόλυτα, γιατί όλα τα άλλα θα έλθουν μόνα τους. Είναι ανάγκη να μου πει κάποιος ότι πρέπει να γράφω το πρόβλημα στο πίνακα και μετά να κάνω ερωτήσεις στους μαθητές; Ότι οι μαθητές πρέπει να αυτενεργούν; Ότι δεν πρέπει να αποπαίρνω τους μαθητές όταν μου κάνουν ερωτήσεις; **Το θέμα είναι τι γίνεται όταν δεν ξέρω την απάντηση**.

Τέλος πάντων, εγώ όταν λέω να ξέρει ένας πώς να εργασθεί για να λύσει ένα πρόβλημα, εννοώ τους τρόπους και τις μεθόδους που προκύπτουν από τους νόμους και τους κανόνες της μαθηματικής λογικής, η οποία πολλές φορές δεν συμπίπτει με την κοινή λογική.

- Στα προβλήματα των μαθηματικών συνήθως ή ζητάμε να αποδείξουμε μια πρόταση ή ζητάμε να βρούμε ένα ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμούς, διανύσματα, συναρτήσεις κτλ.).

Οι ασκήσεις που αναφέρουμε στη συνέχεια προσπαθήσαμε να είναι απλές, γιατί δεν θέλουμε να επικεντρωθεί η προσοχή μας στα τεχνάσματα , αλλά στις μεθόδους λύσης.

2. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

2.1. Η έννοια της απόδειξης τα μαθηματικά

Σε μια Μαθηματική Θεωρία όταν λέμε ότι θα αποδείξουμε μια πρόταση q, εννοούμε ότι: από τα αξιώματα της θεωρίας και με τη βοήθεια των νόμων και των κανόνων της Μαθηματικής Λογικής, θα συμπεράνουμε την αλήθεια της q. Με άλλα λόγια, εννοούμε ότι: αν $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ είναι τα αξιώματα της θεωρίας, θα συμπεράνουμε την αλήθεια της συνεπαγωγής:

$$(p_1 \text{ και } p_2 \text{ και } \ldots \text{ και } p_\nu) \Rightarrow q.$$

Και επειδή το πρώτο μέλος είναι μια πρόταση αληθής, με βάση τον κανόνα αποσπάσεως, συμπεράνουμε την αλήθεια της q. Υπενθυμίζουμε τον κανόνα αποσπάσεως:

Κανόνας αποσπάσεως		**Προσοχή!**	
$p \Rightarrow q$	α	$p \Rightarrow q$	α
p	α	q	α
q	α	p;	

Συνήθως, στην απόδειξη μιας πρότασης δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε όλα τα αξιώματα της θεωρίας. Επίσης, για τη συντόμευση των αποδείξεων, χρησιμοποιούμε σ' αυτές και άλλες προτάσεις (εκτός από τα αξιώματα) που έχουν αποδειχθεί προηγουμένως (προηγούμενα θεωρήματα).

Για να αποδείξουμε μια πρόταση ω εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

2.2. Μέθοδος των συνεπαγωγών

Κατασκευάζουμε μία πεπερασμένη διαδοχή αληθών προτάσεων της μορφής:

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ \ldots, t \Rightarrow u,\ u \Rightarrow \omega,$$

ή συντομότερα:

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow \ldots \Rightarrow t \Rightarrow u \Rightarrow \omega, \qquad (1)$$

όπου p είναι μια αληθής πρόταση της θεωρίας (αξίωμα ή θεώρημα ή υπόθεση). Τότε, η πρόταση $p \Rightarrow \omega$ είναι αληθής (κανόνας υποθετικού συλλογισμού) και επειδή η p είναι αληθής και η ω είναι αληθής (κανόνας αποσπάσεως).

Με άλλα λόγια:

- ♦ **Ξεκινάμε από μια αληθή πρόταση p και με συνεπαγωγές (⇒) φθάνουμε στην ω.**

Παράδειγμα 1. Για ένα αριθμό $\alpha \in \mathbf{R}$, ισχύουν: $-3 \le \alpha < 2$. Να δείξετε ότι:

$$|2\alpha + 3| < 7.$$

Λύση. Έχουμε:

$$-3 \le \alpha < 2 \Rightarrow -6 \le 2\alpha < 4 \Rightarrow -3 \le 2\alpha + 3 < 7 \Rightarrow -7 < 2\alpha + 3 < 7 \Rightarrow |2\alpha + 3| < 7.$$

Παράδειγμα 2. Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, να δείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta .$$

Λύση. Έχουμε:

$$(\alpha - \beta)^2 \ge 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \ge 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta .$$

2.3. Μέθοδος του «αρκεί»

Πολλές φορές, η έναρξη της απόδειξης μιας πρότασης ω με συνεπαγωγές δεν είναι εύκολη, γιατί δεν είναι εύκολο να βρούμε από ποια αληθή πρόταση p πρέπει να ξεκινήσουμε. Τότε, συνήθως, επιχειρούμε την κατασκευή της διαδοχής των συνεπαγωγών (1) της § 2.2 αρχίζοντας από το τέλος, δηλαδή από την αποδεικτέα πρόταση ω. Τότε λέμε:

Για να αποδείξουμε την ω,

αρκεί να αποδείξουμε την u (εννοούμε $u \Rightarrow ω$),

αρκεί να αποδείξουμε την t (εννοούμε $t \Rightarrow u$),

κ.ο.κ.

Προχωρούμε κατ' αυτόν τον τρόπο έως ότου φθάσουμε σε μια αληθή πρόταση p της θεωρίας. Τότε έχουμε:

ω αρκεί u αρκεί t ,…, αρκεί p,

δηλαδή:

$$ω \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow \ldots \Leftarrow p. \qquad (1)$$

Η διαδοχή αυτή είναι η διαδοχή (1) της προηγούμενες παραγράφου γραμμένη από το τέλος.

Με άλλα λόγια:

- **Ξεκινάμε από την αποδεικτέα πρόταση ω και με αρκεί ($\Leftarrow$) φθάνουμε σε μια αληθή πρόταση p.**

Παράδειγμα 1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει:α+β+γ=1. Να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\beta + \gamma) = \gamma^2 + 1$.

Λύση. Για να δείξουμε τη ζητούμενη η ισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + 2\gamma = \gamma^2 + 1$, αρκεί: $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \gamma^2 + 1 - 2\gamma$, αρκεί: $(\alpha+\beta)^2=(1-\gamma)^2$, αρκεί: α+β=1-γ, αρκεί: α+β+γ=1, ισχύει.

Παράδειγμα 2. Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β να δείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta .$$

Λύση. Για να δείξουμε τη ζητούμενη σχέση, αρκεί να δείξουμε ότι:

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$, αρκεί: $(\alpha-\beta)^2\geq 0$, ισχύει.

2.4. Παρατηρήσεις

α) Στην απόδειξη της ω με συνεπαγωγές, όπως και στην απόδειξη με τη μέθοδο του «αρκεί», δεν χρησιμοποιήθηκε καμία από τις αντίστροφες συνεπαγωγές , δηλαδή από τις συνεπαγωγές:

$$\omega \Rightarrow u \Rightarrow t \Rightarrow \ldots \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p. \qquad (1)$$

Έτσι λοιπόν δεν μας ενδιαφέρει αν οι συνεπαγωγές αυτές ισχύουν ή όχι, αφού δεν έχουν καμία σχέση με την κατασκευαζόμενη απόδειξη της ω.

Και εάν μία ή περισσότερες από αυτές τις αντίστρεφες συνεπαγωγές ισχύουν, τότε δεν θα το σημειώσουμε στη διαδοχή (1) της §2.3 ή στη διαδοχή (1) της §2.2; **Όχι, γιατί σκοπός μας δεν είναι να αναφέρουμε όλα όσα ισχύουν στα Μαθηματικά, άλλα από αυτά που ισχύουν, εκείνα που χρειάζονται για να κάνουμε την απόδειξη της ω.** Διαφορετικά θα έπρεπε να αναφέρουμε και το θεώρημα του Πυθαγόρα! (και όχι μόνο), γιατί η σχέση του με την κατασκευαζόμενη απόδειξη της ω δεν διαφέρει από εκείνη των αντίστροφων αυτών συνεπαγωγών (και στις δύο περιπτώσεις ισχύουν, αλλά δεν χρησιμοποιούνται στην απόδειξη).

β) Αν, ξεκινώντας από την αποδεικτέα πρόταση ω και προχωρώντας με «αρκεί» φθάσουμε σε μια ψευδή πρόταση p, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για την αλήθεια της ω.

Και τι θα κάναμε τότε; Θα επαναλάβουμε την προσπάθειά μας με άλλες προτάσεις, οι οποίες ενδεχομένως να μας οδηγήσουν, με «αρκεί», σε μια αληθή πρόταση p.

γ) Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση ω είναι λάθος να λέμε:

« Έστω ότι η ω ισχύει» **(τότε δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα!)** και μετά (με συνεπαγωγές) να φθάνουμε σε μια αληθή πρόταση p (παραπάνω διαδοχή (1)) και στη συνέχεια να λέμε: « άρα, η ω ισχύει», γιατί η ω υποθέσαμε ότι ισχύει **(φαύλος κύκλος).**

Ακριβέστερα , τότε , θα έχουμε αποδείξει την αλήθεια των προτάσεων: ω⇒p και p, από τις οποίες συμπεραίνουμε την αλήθεια της ω, που, όπως είδαμε παραπάνω

(§ 2.1), είναι λάθος. Έτσι λοιπόν ,τότε ,όχι μόνον δεν έχουμε αποδείξει την αλήθεια της ω, αλλά **οι συνεπαγωγές αυτές δεν έχουν καμία σχέση με την απόδειξη της ω** (αν αυτή είναι αληθής) .

Παράδειγμα. Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β να δείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta . \qquad (2)$$

Λάθος λύση. Έστω ότι η (2) ισχύει (τότε τι θα αποδείξουμε;). Έχουμε:

$$(2) \Rightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0, \text{ αληθής .}$$

Άρα η (2) ισχύει !!!. Δηλαδή, αποδείξαμε κάτι που έχουμε υποθέσει ότι ισχύει.

Σημείωση . Κάποιος ισχυρίζεται ότι για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει: α=β.

Η απόδειξη που έκανε είναι η εξής: Έστω ότι ισχύει α=β. Τότε:

$$2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha\text{-}\beta = \beta\text{-}\alpha \Rightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2 = \left(\beta-\alpha\right)^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = \beta^2+\alpha^2-2\beta\alpha,$$

αληθής. Άρα απεδείχθη ότι α=β, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$!!! (απέδειξε την αλήθεια των προτάσεων: p⇒q και q και συνεπέρανε την αλήθεια της p!!!, §2.1).

δ) Αν, ξεκινώντας από την αποδεικτέα πρόταση ω και προχωρώντας με (αληθείς) ισοδυναμίες φθάσουμε σε μια αληθή πρόταση p, δηλαδή:

$$\omega \Leftrightarrow u \Leftrightarrow t \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p \qquad (3)$$

τότε δεν θα έχουμε αποδείξει την ω; Ναι, αλλά αν ένας έγραφε ενδιάμεσα το θεώρημα του Πυθαγόρα, ασφαλώς θα το διαγράφατε, **όχι γιατί δεν ισχύει, αλλά γιατί είναι άσχετο με την απόδειξη της ω**. Για τον ίδιο λόγο θα πρέπει να διαγράψετε και όλες τις συνεπαγωγές που οδηγούν από την ω στην p, δηλαδή τις συνεπαγωγές:

$$\omega \Rightarrow u \Rightarrow t \Rightarrow \ldots \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p \qquad (4)$$

αφού, αν και είναι αληθείς, είναι άσχετες με την απόδειξη της ω που κατασκευάζουμε. Η απόδειξη της ω είναι η διαδοχή:

$$\omega \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow \ldots \Leftarrow r \Leftarrow q \Leftarrow p \qquad (5)$$

όπου p αληθής .

Το χειρότερο είναι , όταν, για να αποδείξει ένας την ω , προσπαθεί να κατασκευάσει τη διαδοχή των ισοδυναμιών (3) και συμβεί οι συνεπαγωγές (5) **(που αποτελούν την απόδειξη της ω)** να ισχύουν και μία τουλάχιστον από τις συνεπαγωγές (4) **(που είναι άσχετες με την απόδειξη της ω)** δεν ισχύει. Τότε, **χωρίς λόγο, δεν θα κάνει την απόδειξη της ω.**

Παράδειγμα. Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β να δείξετε ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta}.$$

Λάθος λύση. Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0.$$

Και επειδή η τελευταία σχέση είναι αληθής, η ζητούμενη σχέση ισχύει.

- Οι συνεπαγωγές:

$$\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \ge 0 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0,$$

είναι αληθείς, αλλά δεν έχουν καμία σχέση με την απόδειξη της ζητούμενης σχέσης. Αν τις γράψαμε μόνο και μόνο επειδή ισχύουν, τότε, όπως είπαμε και παραπάνω, θα έπρεπε να γράψουμε και το θεώρημα του Πυθαγόρα και όλα τα αλλά θεωρήματα που ισχύουν στα μαθηματικά

2.5. Μέθοδος της εις «άτοπο απαγωγής»

♦ **Ξεκινάμε από την $\bar{\omega}$ (όχι ω) και με συνεπαγωγές ($\Rightarrow$) φθάνουμε σ΄ένα άτοπο.**

Έτσι η $\bar{\omega}$ είναι ψευδείς και άρα η ω είναι αληθής.

Στην πράξη λέμε: « Έστω ότι η ω δεν ισχύει». Τότε θα ισχύει η $\bar{\omega}$**.** Και με συνεπαγωγές φθάνουμε σε άτοπο.

- Βλέπουμε πόσο σημαντικό είναι να ξέρουμε να σχηματίσουμε την άρνηση μιας πρότασης.

Παράδειγμα. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β με αβ≠0. Να δείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $\boldsymbol{\frac{2\alpha}{\beta}}$ και $\boldsymbol{\frac{\beta}{3\alpha}}$ είναι μικρότερος από το 1.

Λύση. Θέλουμε να δείξουμε την πρόταση: $\left(\frac{2\alpha}{\beta}<1 \text{ ή } \frac{\beta}{3\alpha}<1\right)$. Έστω ότι η πρόταση αυτή δεν είναι αληθής. Τότε θα είναι αληθής η άρνησή της, που είναι:

$$\left(\frac{2\alpha}{\beta} \ge 1 \text{ και } \frac{\beta}{3\alpha} \ge 1\right).$$

Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{2\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{3\alpha} \ge 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \ge 1 \Rightarrow 2 \ge 3, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η πρόταση που θέλουμε να δείξουμε ισχύει.

2.6. Απόδειξη συνεπαγωγής

Έστω ότι έχουμε να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή:

«Αν p τότε q », συμβολικά: $p \Rightarrow q$.

Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε να αποδείξουμε την αλήθεια της p, ούτε την αλήθεια της q, αλλά την αλήθεια της πρότασης: $p \Rightarrow q$.

Από τον ορισμό της συνεπαγωγής (διπλανός πίνακας), έχουμε:

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

- Αν η p είναι ψευδής, τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής.
- Αν η p είναι αληθής, τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, μόνο όταν και η q είναι αληθής (πρώτη γραμμή στον παραπάνω πίνακα).

Έτσι, αν η p είναι αληθής, αρκεί να δείξουμε ότι και η q είναι αληθής.

Στην πράξη υποθέτουμε ότι η p είναι αληθής και δείχνουμε την αλήθεια της q. Την περίπτωση που η p είναι ψευδής δεν την αναφέρουμε καθόλου, **όχι γιατί δεν χρειάζεται**, αλλά γιατί υποτίθεται ότι όλοι γνωρίζουν ότι τότε η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής.

Παράδειγμα. Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$\textbf{αν } 2\alpha + \frac{3}{\alpha} = 4\textbf{, τότε } \alpha^2 + \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2 = 1 \text{ .}$$

Λύση. Έχουμε:

$$2\alpha + \frac{3}{\alpha} = 4 \Rightarrow \left(2\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^2 = 16 \Rightarrow 4\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} + 2.2\alpha.\frac{3}{\alpha} = 16 \Rightarrow 4\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} + 12 = 16$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{9}{4\alpha^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2 = 1.$$

Άλλος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι η υπόθεση είναι ψευδής, οπότε η συνεπαγωγή είναι αληθής. Πράγματι, για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, έχουμε:

$$2\alpha + \frac{3}{\alpha} = 4 \Rightarrow 2\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \text{, άτοπο.}$$

Σημείωση. Θέμα με ψευδή υπόθεση είχε τεθεί το1947 στις Εισαγωγικές Εξετάσεις της Μαθηματικής Σχολής(όπως λεγόταν τότε) του Πανεπιστημίου Αθηνών (Τριγωνομετρία, άσκηση $1^η$), καθώς και το1997 στις Γενικές Εξετάσεις της $1^{ης}$ Δέσμης (θέμα3Β).

2.7. Μέθοδος της αντιστροφοαντιθέτου προτάσεως

Οι συνεπαγωγές:

$$p \Rightarrow q \quad \text{και} \quad \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$$

ονομάζονται αντιστροφοαντίθετες. Ισχύει:

$$(\ p \Rightarrow q\ ) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}\ ) \qquad \text{(αντιστροφοαντίθετος νόμος)}$$

Έτσι, για να δείξουμε μία συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε την $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, η οποία μερικές φορές είναι ευκολότερη από εκείνη της $p \Rightarrow q$.

Παράδειγμα. Με $a \in \mathbb{Z}$ να δείξετε ότι:

$$\left(\boldsymbol{\alpha^2}\ \textbf{περιττός}\right) \Rightarrow \left(\boldsymbol{\alpha}\ \textbf{περιττός}\right).$$

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\text{όχι}\left(\alpha \text{ περιττός}\right) \Rightarrow \text{όχι}\left(\alpha^2 \text{ περιττός}\right),$$

δηλαδή ότι:

$$\left(\alpha \text{ άρτιος}\right) \Rightarrow \left(\alpha^2 \text{ άρτιος}\right).$$

Η συνέχεια είναι απλή.

2.8. Απόδειξη ισοδυναμίας: p⇔q

1$^{\text{ος}}$ τρόπος. Δείχνουμε ότι: p ⇒ q και q ⇒ p.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος. Κατασκευάζουμε μια διαδοχή (αληθών) ισοδυναμιών της μορφής:

$$p \Leftrightarrow r \Leftrightarrow t \Leftrightarrow \ldots u \Leftrightarrow q \quad \text{ή} \quad q \Leftrightarrow u \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow r \Leftrightarrow p.$$

3$^{\text{ος}}$ τρόπος. Δείχνουμε ότι: p ⇔ r και q ⇔ r.

2.9. Απόδειξη προτάσεων της μορφής: «Για κάθε $\mathbf{x \in \Omega, p(x)}$»

Έστω ότι έχουμε να αποδείξουμε μια πρόταση της παραπάνω μορφής. Συμβολικά: $\forall x \in \Omega, p(x)$, όπου p(x) είναι ένας προτασιακός τύπος ορισμένες επί του συνόλου Ω. Τότε:

♦**Θεωρούμε ένα (τυχαίο, όχι συγκεκριμένο) στοιχείο ξ του Ω και δείχνουμε ότι η πρόταση p(ξ) είναι αληθής.**

Συνήθως, αντί για το γράμμα ξ χρησιμοποιούμε πάλι το γράμμα x και αρχίζουμε την απόδειξη λέγοντας:

- «Έστω ένα $x \in \Omega$ ». Τότε κτλ. φθάνουμε στην αλήθεια της p(x).

— Ειδικά όταν έχουμε να αποδείξουμε μία πρόταση της μορφής:

«Για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \nu_0 (\nu_0 \in \mathbb{N}), p(\nu)$ », μπορούμε να εφαρμόσουμε και τη γνωστή μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

— Είναι φανερό ότι για να αποδείξουμε ότι μία πρόταση της παραπάνω μορφής: «$\forall x \in \Omega, p(x)$» δεν ισχύει (δεν είναι αληθής), αρκεί να βρούμε μια τιμή x=ξ (ξ$\in\Omega$) ,για την οποία η πρόταση p(ξ) δεν ισχύει (δεν είναι αληθής). Μια τέτοια τιμή του x λέγεται και ένα **αντιπαράδειγμα** για την πρόταση «$\forall x \in \Omega, p(x)$ ».

— Στο σημείο αυτό θα ήθελα να επισημάνω ένα παραλογισμό που τον ακούμε συχνά από την τηλεόραση, το ραδιόφωνο και όχι μόνο. Σε συζητήσεις, μεταξύ σοβαρών κατά τ' άλλα ανθρώπων, θα έχετε ακούσει κάποιος να ισχυρίζεται ότι ισχύει κάτι γενικό, δηλαδή ότι ισχύει μία πρόταση της μορφής: «$\forall x \in \Omega, p(x)$ ». Ένας άλλος να βρίσκει ένα παράδειγμα που δεν ισχύει και ο πρώτος να απαντά: «αυτό είναι μια εξαίρεση που επιβεβαιώνει τον κανόνα**!!!**». Μεγαλύτερος παραλογισμός δεν υπάρχει, αφού μία εξαίρεση (ένα αντιπαράδειγμα), όπως είδαμε παραπάνω, είναι αρκετή για να αναιρέσει (και όχι να επιβεβαιώσει) ένα υποψήφιο κανόνα (ένα γενικό ισχυρισμό).

3. ΕΥΡΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Όταν σ' ένα πρόβλημα ζητάμε να βρούμε ένα μαθηματικό αντικείμενο, εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους.

3.1. Μέθοδος των ισοδυναμιών

♦ **Βρίσκουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που οφείλει να πληροί το ζητούμενο αντικείμενο και μετά με ισοδυναμίες βρίσκουμε το αντικείμενο αυτό (μπορεί να βρούμε περισσότερα από ένα).**

Παράδειγμα. Να βρείτε τους αριθμούς $\mathbf{x \in R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$\sqrt{\mathbf{2x+5}} = \mathbf{x+1}. \qquad \mathbf{(1)}$$

Λύση. Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x+5 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+5 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+5 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} \geq 1 \\ (\mathrm{x=2 \text{ ή } x=-2}) \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{x=2}.$$

3.2. Μέθοδος: « ευθύ- αντίστροφο»

α) Υποθέτουμε ότι ένα αντικείμενο (αριθμός, διάνυσμα, συνάρτηση κτλ.) πληροί τις δοσμένες συνθήκες και με συνεπαγωγές το βρίσκουμε (μπορεί να βρούμε περισσότερα από ένα).

Τονίζουμε ότι κατ΄αυτόν τον τρόπο από **πουθενά δεν εξασφαλίζεται ότι το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες.** Γι' αυτό είναι απαραίτητο να εξετάσουμε και το αντίστροφο.

β) Αντιστρόφως. Εξετάζουμε αν το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες.

Αν το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες, τότε αυτό είναι το ζητούμενο. Αν όχι, τότε τέτοιο αντικείμενο δεν υπάρχει. Εννοείται ότι αν βρούμε περισσότερα από ένα αντικείμενα, τότε θα εξετάσουμε το καθένα χωριστά αν πληροί τις δοσμένες συνθήκες και θα κρατήσουμε εκείνα που τις πληρούν (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbf{R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathbf{x^2+\lambda x-2\lambda}}{\mathbf{x-1}}=\mathbf{5}\ . \qquad \mathbf{(1)}$$

Λύση. α) Έστω ότι για ένα αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$ η (1) ισχύει. Τότε από αυτή και επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{\chi-1}\cdot(x-1)=5\cdot 0\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(x^2+\lambda x-2\lambda\right)=0\Rightarrow 1+\lambda-2\lambda=0\Rightarrow \lambda=1.$$

β) Αντιστρόφως. Έστω ότι λ=1. Τότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3\neq 5\,.$$

Άρα, τέτοιος αριθμός λ δεν υπάρχει.

3.3. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι θα βρούμε το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης;

Έχουμε συμφωνήσει ότι ένας δοσμένος τύπος f(x) ορίζει μία συνάρτηση με σύνολο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους η έκφραση f(x) έχει νόημα πραγματικού αριθμού (με την προϋπόθεση ότι το σύνολο αυτό είναι $\neq\varnothing$). Δηλαδή, με σύνολο ορισμού το σύνολο:

$$\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in\mathbb{R}\right\}\neq\varnothing\,.$$

Το σύνολο αυτό είναι πλήρως ορισμένο όταν μας δοθεί ο τύπος f(x).Έτσι, όταν λέμε ότι θα βρούμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης που ορίζεται από ένα δοσμένο τύπο f(x), εννοούμε ότι θα βρούμε το παραπάνω σύνολο Α. Τι εννοούμε όμως όταν λέμε ότι θα βρούμε το σύνολο αυτό Α; **Σιωπηρά, εννοούμε ότι θα το**

θέσουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1. Να βρείτε σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$\mathbf{f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}}.$$

Λύση. Το ζητούμενο σύνολο είναι: $\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}$. Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο αυτό Α αν, και μόνο αν:

$$f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\4-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x^2\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\|x|\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\-2\leq x\leq 2\end{cases}$$

Συνεπώς: Α=$[-2,0)\cup(0,2]$.

Παράδειγμα 2. Να βρείτε σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$\mathbf{g(x)=\frac{x^2+1}{x^7-10x+7}}. \qquad \mathbf{(1)}$$

Λύση. Το ζητούμενο σύνολο είναι: $\mathrm{B}=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\in\mathbb{R}\}$. Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο αυτό Β αν, και μόνο αν:

$$g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x^7-10x+7}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^7-10x+7\neq 0.$$

Άρα: $\mathrm{B}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^7-10x+7\neq 0\}$ (2).

Το σύνολο αυτό Β δεν μπορεί να τεθεί υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, γιατί δεν λύνεται η εξίσωση: $x^7-10x+7=0$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω (σιωπηρή συμφωνία), το σύνολο Β δεν μπορεί να βρεθεί, αν και είναι πλήρως ορισμένο. Τελικά, ποιο θα πούμε ότι είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης (1); Φυσικά το σύνολο Β που δίνεται από την ισότητα (2)

<u>3.4</u>. <u>Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης θα πρέπει πρώτα να βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης;</u>

Όταν θέλουμε να βρούμε ένα όριο $L=\lim_{x\to x_0}f(x)$, όπου $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, **δεν χρειάζεται να βρίσκουμε προηγουμένως το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f.** Δηλαδή, δεν χρειάζεται να θέτουμε το σύνολο (ορισμού της): $\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}$ υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Άλλωστε, όπως είδαμε προηγουμένως, αυτό δεν μπορεί να γίνει πάντοτε. Το μόνο που χρειάζεται, αν θέλουμε να είμαστε αυστηροί, είναι **να δείχνουμε ότι η**

συνάρτηση f είναι ορισμένοι κοντά στο x_0 ή όπως λέμε, σε μια γειτονιά του x_0. Δηλαδή, να δείχνουμε ότι υπάρχει σύνολο της μορφής : $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ που να είναι υποσύνολο του A (ανάλογα για τα πλευρικά όρια). Αυτό απαιτούν όλοι οι ορισμοί των ορίων όπως και όλα τα σχετικά θεωρήματα και **τίποτα άλλο**. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Να βρείτε το όριο: $\mathbf{L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x^7-3x+10}}$**.**

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^7-3x+10}$ είναι $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x^7-3x+10\neq 0\right\}$ (δεν μπορούμε να το βρούμε, δηλαδή δεν μπορούμε να το βάλουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$). Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^7-3x+10\right)=8>0$, έπεται ότι $x^7-3x+10>0$ (και άρα $x^7-3x+10\neq 0$) κοντά στο 1. Δηλαδή, υπάρχει σύνολο της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$, όπου $\alpha<1<\beta$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $x^7-3x+10\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,1)\cup(1,\beta)$. Συνεπώς: $(\alpha,1)\cup(1,\beta)\subseteq$ A. Άρα η συνάρτηση f είναι ορισμένη κοντά στο 1 και συνεπώς το όριο L έχει νόημα. Βρίσκουμε εύκολο ότι : $L=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.

Παράδειγμα 2. Να βρείτε το όριο: $\mathbf{L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^6-x^5-x^2+3x-2}}$**.**

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^6-x^5-x^2+3x-2}$ είναι $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x^6-x^5-x^2+3x-2\neq 0\right\}$. Η συνάρτηση στον παρονομαστή μηδενίζεται με x=1. Εκτελούμε τη διαίρεση του παρονομαστή με το x-1 και βρίσκουμε:

$$x^6-x^5-x^2+3x-2=(x-1)\left(x^5-x+2\right).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^5-x+2\right)=2>0$, έπεται ότι $x^5-x+2>0$ (και άρα $x^5-x+2\neq 0$) κοντά στο 1. Λόγω αυτού και επειδή x-1≠0 κοντά στο 1, έπεται ότι:

$$x^6-x^5-x^2+3x-2=(x-1)\left(x^5-x+2\right)\neq 0, \text{ κοντά στο 1.}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι ορισμένοι κοντά στο 1 και συνεπώς το όριο L έχει νόημα. Βρίσκουμε ότι:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^5-x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^5-x+2}=\frac{4}{2}=2.$$

Παράδειγμα 3. Να βρείτε το όριο: $\mathbf{L=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^7-x^4+x-5}}$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{3x^7-x^4+x-5}$ είναι $\text{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid 3x^7-x^4+x-5\geq 0\}$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(3x^7-x^4+x-5)=\lim_{x\to+\infty}(3x^7)=+\infty$, έπεται ότι: $3x^7-x^4+x-5>0$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή, υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $3x^7-x^4+x-5>0$, για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$. Συνεπώς: $(\alpha,+\infty)\subseteq$ A. Άρα η συνάρτηση f είναι ορισμένη κοντά στο $+\infty$ και συνεπώς το όριο L έχει νόημα. Βρίσκουμε ότι:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^7\left(3-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}-5\frac{1}{x^7}\right)}=+\infty.$$

Παράδειγμα 4. Να βρείτε το όριο: $L=\lim_{x\to 0}\ln(x^5+3x-1)$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln(x^5+3x-1)$ είναι: $\text{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^5+3x-1>0\}$. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένοι κοντά στο 0. Τότε θα είχαμε $x^5+3x-1>0$ κοντά στο 0 και συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0}(x^5+3x-1)\geq\lim_{x\to 0}0\Rightarrow -1\geq 0,\text{ άτοπο.}$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι ορισμένοι κοντά στο 0 και συνεπώς το όριο L δεν έχει νόημα.

4. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

4.1. Τα σύμβολα στα σχολικά βιβλία

Επειδή τα σχολικά βιβλία δεν έχουν τα σύμβολα της συνεπαγωγής και των ποσοδεικτών ($\forall$ και $\exists$)(τα παλαιότερα σχολικά βιβλία τα είχαν), πολλοί λένε ότι οι έννοιες αυτές βγήκανε από τα Μαθηματικά. Αλλά, αν βγάλουμε τις έννοιες αυτές από τα Μαθηματικά, τότε καταργούμε όλα τα Μαθηματικά, αφού οι έννοιες αυτές υπεισέρχονται παντού στα Μαθηματικά. **Τα σύμβολα λοιπόν βγάλανε από τα σχολικά βιβλία και όχι τις έννοιες τους από τα Μαθηματικά, τις οποίες άλλωστε δεν θα μπορούσαν να τις βγάλουν**. Αυτό έγινε, γιατί, όπως μου είχαν πει τότε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, όχι γιατί δεν χρειάζονται, αλλά γιατί δεν προσπάθησαν να τα κατανοήσουν και να τα χρησιμοποιούν σωστά, με αποτέλεσμα να γράφουν το ένα σύμβολο αντί του άλλου και να τα θεωρούν ως σύμβολα στενογραφίας και να τα γράφουν μέσα στα κείμενα. Τους είχα πει τότε ότι τα θέματα δεν λύνονται με το να εφαρμόζουν τον κανόνα : «πονάει κεφάλι, κόβει κεφάλι». Υπάρχουν βέβαια και αυτοί που λένε ότι αυτά είναι «φορμαλισμός». Θα μου επιτρέψουν να τους πω ότι κάνουν λάθος και ότι δεν πρόκειται περί φορμαλισμού. Πρόκειται για λίγα σύμβολα τα οποία μας επιτρέπουν να εκφραζόμαστε με σαφήνεια και συντομία. Και αν κάποιος θέλει να μάθει τι είναι φορμαλισμός ,ας ανοίξει ένα βιβλίο των BOYRBAKI. Εξάλλου, η γνώμη μου είναι ότι, ο φορμαλισμός απευθύνεται στις μηχανές και όχι στους ανθρώπους.

4.2. Τα σύμβολα της λογικής στα μαθηματικά είναι απαραίτητα

Είναι γεγονός, ότι σ' όλα τα θέματα των Μαθηματικών υπεισέρχονται οι έννοιες της συνεπαγωγής, της ισοδυναμίας και των ποσοδεικτών. Πρέπει λοιπόν να ξέρουμε ότι, είτε χρησιμοποιούμε τα σύμβολά τους είτε όχι, αν δεν ξέρουμε (από τη Μαθηματική Λογική) πολύ καλά τους νόμους που διέπουν τις έννοιες αυτές, είναι δυνατόν σε ορισμένα ζητήματα να μην μπορούμε να απαντήσουμε και το χειρότερο, να κάνουμε λάθη χωρίς να το καταλάβουμε. Αλλά, χωρίς σύμβολα είναι πολύ δύσκολο, σχεδόν αδύνατο, να μάθουμε τους νόμους αυτούς. Για παράδειγμα, χωρίς σύμβολα, είναι πολύ δύσκολο να μάθουμε την άρνηση μιας συνεπαγωγής ή τους νόμους των ποσοδεικτών. Θα αναφέρω ένα παράδειγμα:

Έστω ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ορισμένοι κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell (\ell\in\mathbb{R})$ αν, και μόνο αν:

Για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in A$
με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Τώρα, θέλουμε να μάθουμε πότε είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq\ell$. Και βέβαια η απάντηση δεν πρέπει να περιέχει αρνήσεις, γιατί τότε στην ουσία δεν απαντά στο ερώτημα.

Λοιπόν, για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει πρώτα να γράψουμε τον παραπάνω ορισμό στη συμβολική του μορφή, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in A, 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon\right].$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να ξέρουμε να σχηματίζουμε την άρνηση μιας συνεπαγωγής $[\overline{p\Rightarrow q}\Leftrightarrow(p \text{ και } \overline{q})]$ και επίσης να ξέρουμε να σχηματίζουμε την άρνηση μιας ποσοδεικτικής πρότασης. Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq \ell \Rightarrow \left[\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x\in A, 0<|x-x_0|<\delta \text{ και } |f(x)-\ell|\geq\varepsilon\right].$$

4.3. Λάθη που πιθανόν να κάνουμε όταν δεν γράφουμε τους ποσοδείκτες

Πολλές φορές, σε μία λύση, δεν γράφουμε τους ποσοδείκτες, όχι γιατί δεν χρειάζονται, αλλά γιατί έτσι νομίζουμε ότι απλοποιούμε τα θέματα. Στην ουσία όμως δυσκολεύουμε περισσότερο τα πράγματα, γιατί τότε πρέπει να τους υπονοούμε. Τώρα, αν δεν τους γράφουμε και ούτε τους υπονοούμε (εκεί που πρέπει), τότε όχι μόνο αρχίζουν οι ασάφειες, αλλά είναι σίγουρο ότι θα κάνουμε και λάθη.

Παράδειγμα 1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $\mathbf{f:R\to R}$, για τις οποίες, για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$, ισχύει:

$$\mathbf{|f(x)+f(y)|=|x+y|}\ . \qquad \mathbf{(1)}$$

Λύση λανθασμένη. Από την (1) με y=x βρίσκουμε:

$$|2f(x)|=|2x|\Rightarrow|f(x)|=|x|\Rightarrow\left[f(x)=x \text{ ή } f(x)=-x\right].$$

Άρα, οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: f(x)=x και f(x)=−x (πληρούν τη δοσμένη ισότητα)

Που είναι το λάθος; Την ισότητα $|f(x)|=|x|$ δεν την πληρούν μόνο οι συναρτήσεις που γράψαμε: f(x)=x και f(x)=− x, αλλά και πολλές άλλες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 1 \\ -x, & \text{αν } x<1 \end{cases} \qquad (2)$$

Λοιπόν, η λύση δεν είναι σωστή, γιατί, εκτός των άλλων, απ' αυτά που γράψαμε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ζητούμενες συνάρτησης είναι μόνο αυτές που βρήκαμε.

Εκείνο που έχει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι να δούμε τι ήταν αυτό που μας οδήγησε να λύσουμε λάθος την άσκηση. Καταρχήν πρέπει να καταλάβουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι ένας πραγματικός αριθμός και συνεπώς οι συναρτήσεις δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται όπως οι πραγματικοί αριθμοί. Μια συνάρτηση f έχει μια μεταβλητή x, η οποία παίρνει τιμές από το σύνολο ορισμού της (οι τιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί). Έτσι, όταν γράφουμε μια σχέση που περιέχει το f(x) πρέπει να λέμε για ποια x ισχύει ή θέλουμε να ισχύει (εκτός αν πρόκειται για εξίσωση ή ανίσωση, οπότε ζητάμε τα x για τα οποία ισχύει). Το λάθος είναι ότι στην παραπάνω λύση **δεν γράψαμε και ούτε υπονοούσαμε ότι οι συνεπαγωγές ισχύουν για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**,** με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουμε σιωπηρά τις συναρτήσεις σαν πραγματικούς αριθμούς. Ας ξαναγράψουμε λοιπόν τις συνεπαγωγές αυτές βάζοντας μπροστά το: «για κάθε $x \in \mathbb{R}$» και μάλιστα, για ευκολία μας, ας το γράφουμε συμβολικά: «$\forall x \in \mathbb{R}$». Έτσι θα έχουμε:

$$\left[\forall x \in \mathbb{R}, \left|2f(x)\right| = \left|2x\right|\right] \Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R}, \left|f(x)\right| = \left|x\right|\right] \Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R}, \left(\text{f(x)=x ή f(x)} = -x\right)\right] (3).$$

Αλλά (νόμοι ποσοδεικτών):από την (3) δεν έπεται ότι:

$$(x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ή } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x). \qquad (4)$$

Για παράδειγμα, η παραπάνω συνάρτηση (2) πληροί την (3) αλλά δεν πληροί την (4).

Λύση σωστή. Έστω ότι για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η ισότητα (1) ισχύει. Από την (1) με y=x, βρίσκουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|2f(x)\right| = \left|2x\right| \Rightarrow \left|f(x)\right| = \left|x\right| \Rightarrow f^2(x) = x^2 \text{ (5).}$$

Από την (1) έχουμε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left|f(x) + f(y)\right|^2 = \left|x + y\right|^2 \Rightarrow \left[f(x) + f(y)\right]^2 = \left(x + y\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y) = x^2 + y^2 + 2xy \overset{(5)}{\Rightarrow} f(x)f(y) = \text{xy (6).}$$

Από την (5) με x=1, βρίσκουμε: $f^2(1) = 1$ και άρα f(x)=1 ή f(x)=$-$1.

Από την (6) με $x \in \mathbb{R}$ και y=1, βρίσκομε: f(x)f(1)=x. Έτσι, αν f(1)=1, τότε f(x)=x, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αν f(1)=$-$1, τότε f(x)=$-$x, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, τότε: f(x)=x ή f(x)=$-$x.

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι συναρτήσεις: f(x)=x και f(x)=$-$x πληρούν τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι οι μοναδικές ζητούμενες.

Παράδειγμα 2. Να βρείτε πόσες συναρτήσεις $\mathbf{f : R \to R}$ υπάρχουν, για τις οποίες , για κάθε $\mathbf{x \in R}$, ισχύει: $\mathbf{f^2(x) = x^2 + 1}$.

Λύση λανθασμένη. Έχουμε:

$$f^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \left|f(x)\right| = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{f(x)=}\sqrt{\text{x}^2\text{+1}} \text{ ή } \text{f(x)=-}\sqrt{\text{x}^2\text{+1}}\right]$$

Άρα , υπάρχουν δύο τέτοιες συναρτήσεις, οι εξής:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ και } f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} \text{ .}$$

Αλλά, για παράδειγμα η παρακάτω συνάρτηση (και όχι μόνο):

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}\ , \text{ αν } x\geq 0\\ -\sqrt{x^2+1}\ , \text{ αν } x<0\end{cases} \qquad (7)$$

πληροί την δοσμένη ισότητα και δεν την βρήκαμε.

Λύση σωστή. Έχουμε:

$$\left[\forall x\in\mathbb{R}, f^2(x)=x^2+1\right]\Leftrightarrow\left[\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+1}\right]\Leftrightarrow$$

$$\left[\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|=\sqrt{x^2+1}\right]\Leftrightarrow\left[\forall x\in\mathbb{R}, \left(f(x)=\sqrt{x^2+1} \text{ ή } f(x)=-\sqrt{x^2+1}\right)\right] (8).$$

Η πρόταση (8) δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση: $\left(\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}\right)$ ή $\left(\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-\sqrt{x^2+1}\right)$(αυτό το λάθος έγινε στην προηγούμενη λύση) . Η απάντηση βέβαια είναι ότι υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις.

4.4. Σημείωση

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$, $\quad p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ (επιμεριστικοί νόμοι).

$\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\overline{p}\vee\overline{q}$, $\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\overline{p}\wedge\overline{q}$, $\overline{p\Rightarrow q}\Leftrightarrow p\wedge\overline{q}$ (νόμοι αρνήσεως).

Η άρνηση του «$\forall$» είναι «$\exists$» και η άρνηση του «$\exists$» είναι «$\forall$».

Έστω ότι p(x) και q(x) είναι δύο προτασιακοί τύποι ορισμένοι επί ενός συνόλου Ω. Οι παρακάτω προτάσεις **είναι αληθείς** (νόμοι ποσοδεικτών):

- $\forall x,\left[p(x)\wedge q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\forall x, p(x)\right]\wedge\left[\forall x, q(x)\right]$
- $\exists x,\left[p(x)\vee q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\exists x, p(x)\right]\vee\left[\exists x, q(x)\right]$
- $\left[\forall x, p(x)\right]\vee\left[\forall x, q(x)\right]\Rightarrow\forall x,\left[p(x)\vee q(x)\right]$
- $\exists x,\left[p(x)\wedge q(x)\right]\Rightarrow\left[\exists x, p(x)\right]\wedge\left[\exists x, q(x)\right]$

Οι παρακάτω προτάσεις **δεν είναι πάντοτε αληθείς:**

- $\forall x,\left[p(x)\vee q(x)\right]\Rightarrow\left[\forall x, p(x)\right]\vee\left[\forall x, q(x)\right]$
- $\left[\exists x, p(x)\right]\wedge\left[\exists x, q(x)\right]\Rightarrow\exists x,\left[p(x)\wedge q(x)\right]$

4.5. Αξιοσημείωτη εφαρμογή

Άσκηση. Να βρείτε τι παριστάνει στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2+y^2+2xy+x+y-2=0} \qquad (1)$$

Λύση. Βρίσκουμε εύκολα ότι για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$(1)\Leftrightarrow(x+y-1)(x+y+2)=0\Leftrightarrow(\ x+y-1=0 \text{ ή } x+y+2=0). \qquad (2)$$

Συμπεραίνουμε τώρα ότι η εξίσωση (1) παριστάνει τις δύο ευθείες:

$$\varepsilon_1 : x + y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x + y + 2 = 0.$$

Σχόλιο. Ίσως κάποιος αναρωτηθεί, πώς βγαίνει αυτό το συμπέρασμα**,** αφού έχουμε «για κάθε» και όπως είπαμε παραπάνω, αυτό δεν μοιράζεται σε κάθε μία εξίσωση όταν μεταξύ τους υπάρχει το «ή». Λοιπόν. Το «για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$» αφορά στις ισοδυναμίες και δεν εννοούμε ότι οι εξισώσεις αυτές ισχύουν «για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$».

Το συμπέρασμα αυτό είναι σωστό. Για να το καταλάβουμε όμως θα πρέπει να γίνουμε αυστηροί. Μια εξίσωση με δύο άγνωστους φ(x.y)=0 ,στο καρτεσιανό επίπεδο, παριστάνει το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου αυτού, για τα οποία ισχύει:

$$\exists x,y \in \mathbb{R}, M(x,y) \text{ και } \varphi(x,y)=0. \qquad (3)$$

Έτσι, η εξίσωση (1) παριστάνει το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$\exists x,y \in \mathbb{R},\ M(x,y) \text{ και } (x+y-1)(x+y+2)=0. \qquad (4)$$

Έχουμε:

$$(4) \Leftrightarrow \exists x,y \in \mathbb{R},\ M(x,y) \text{ και } (x+y-1=0 \text{ ή } x+y+2=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x,y \in \mathbb{R},\ [(M(x,y) \text{ και } x+y-1=0) \text{ ή } (M(x,y) \text{ και } x+y+2=0)] \text{ (επιμεριστικός νόμος)}$$

$$\Leftrightarrow [\exists x,y \in \mathbb{R},\ M(x,y) \text{ και } x+y-1=0] \text{ ή } [\exists x, y \in \mathbb{R}, M(x,y) \text{ και } x+y+2=0]$$

(§4.4, δεύτερος ποσοδεικτικός νόμος).

Από την τελευταία ισοδυναμία, σύμφωνα με την (3), προκύπτει το παραπάνω συμπέρασμα

4.6. Επίλογος

Τελειώνοντας θα ήθελα να πω ότι δεν ισχυρίζομαι ότι, αν ένας ξέρει όλα αυτά από τη Μαθηματική Λογική, θα λύνει όλα τα προβλήματα. Ισχυρίζομαι όμως, ότι, τότε, θα γνωρίζει σίγουρους τρόπους για να εργαστεί, δεν θα οδηγείται σε εσφαλμένες λύσεις και το σπουδαιότερο **θα μπορεί να ελέγχει αν μία λύση είναι σωστή ή όχι.**

<u>Βιβλιογραφία</u>

1. Α. Κυριακόπουλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ».
2. G. Polya: «Πώς να το λύσω».
3. Α. Κυριακόπουλου: «Πώς θα το αποδείξω;… Πώς θα το βρω;», άρθρο στο περιοδικό «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β» (1999, τεύχος 33, σελ. 11).
4. «THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY», περιοδικό
5. Α. Κυριακόπουλου: «ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΩΝΗ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Γεννήθηκε στο χωριό «Ίκλαινα- Μεσσηνίας».

Τελείωσε τη μέση εκπαίδευση στο τότε «Πρακτικό Λύκειο Καλαμών». Τον ίδιο χρόνο πέτυχε στο μαθηματικό τμήμα του πανεπιστημίου Αθηνών, το οποίο τελείωσε με «Άριστα».

Διετέλεσε βοηθός του καθηγητή της Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Αθηνών, αειμνήστου Δημητρίου Κάππου. Στη συνέχεια ασχολήθηκε με τα φροντιστήρια για τους υποψήφιους των ανωτάτων σχολών. Έγινε συνέταιρος διαδοχικά στα φροντιστήρια «Σ.Γ.ΚΑΝΕΛΛΟΣ» και «Β.Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗΣ». Μετά, ίδρυσε δικό του φροντιστήριο.

Συνέγραψε είκοσι μαθηματικά βιβλία για τους υποψήφιους και τους φοιτητές των Ανωτάτων Σχολών, μερικά από τα οποία είναι: «**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ**». «**ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ**», «**ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ**», «**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**», «**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**», «**ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**», «**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**», **«ΑΛΓΕΒΡΑ», «ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ— ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ», «ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ», «ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ»** κτλ. Υπήρξε μέλος του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (Ε.Μ.Ε.) και πρόεδρος της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού της Ε.Μ.Ε.,«ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄».