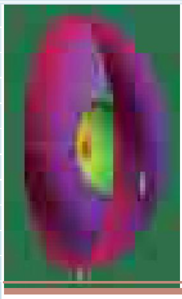


ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ της ΧΙΛΙΕΤΙΑΣ

2ο Μέρος: 1700-2000 μ.Χ.

Της **Χριστίνας Φιλή**, Επίκουρης Καθηγήτριας Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Η δημιουργία του ***Απειροστικού Λογισμού*** είναι συνέπεια μιας μακραίωνης προσπάθειας που ξεκινά από τους ***Ζήνωνα τον Ελεάτη, Δημόκριτο, Εύδοξο*** και ***Αρχιμήδη***, περνά μέσα από τις αραβικές και λατινικές μεταφράσεις των έργων του Αρχιμήδη και συνεχίζεται με τις εργασίες των ***Kepler, Γαλιλαίου, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow*** και ***Huygens.*** Η γένεση όμως του Λογισμού ως λογικού συστήματος οφείλεται στο ***Newton*** και το ***Leibniz***. Με τις μεθόδους τους (των ροών και των διαφορικών) δημιούργησαν ένα ανεξάρτητο και αυτόνομο κλάδο. Οι τεχνικές τους διαμόρφωσαν ένα εργαλείο πολύ πιο αποτελεσματικό από εκείνο της Γεωμετρίας, που κυριαρχούσε μέχρι τότε. Ο *Newton* εμπειρικός, ενώ ο συστηματικός *Leibniz* είναι εκείνος που διαμορφώνει τους πρώτους κανόνες του Λογισμού όπως και το συμβολισμό που ισχύει μέχρι σήμερα.

18ος αιώνας

Οι βασικές ατέλειες του έργου των *Newton* και *Leibniz* εντοπίζονταν στη λογική αδυναμία που περιέχουν οι έννοιες *όριο* και *απειροστό*. Ο ***Jean le Rond D' Alembert*** επιχειρεί να θεμελιώσει την Ανάλυση στη θεωρία των ορίων, ενώ ο ***L. Euler*** στις «εξαφανισμένες ποσότητες». Ο ***J.-L. Lagrange*** θεμελιώνει αυστηρά την Ανάλυση στο ανάπτυγμα συναρτήσεως κατά *Taylor* και ορίζει τις παραγώγους από τους διαδοχικούς όρους του αναπτύγματος. Αν και οι αποδείξεις του δεν ήσαν αυστηρές, οι ιδέες του βρήκαν την πλήρη δικαίωση μέσα από το έργο του ***K. Weierstrass***.

19ος αιώνας

Ο πρωτοπόρος της αυστηρής θεμελίωσης της Αναλύσεως είναι ο ***B. Bolzano***. Είναι ο πρώτος που στον ορισμό της συνέχειας (1817) υπογραμμίζει ότι αυτή πρέπει να βασίζεται στην έννοια του ορίου. Ο ***A.-L. Cauchy*** απαλλάσσει την Ανάλυση από κάθε έννοια μεταφυσικής ή απειροστού και τη θεμελιώνει στην έννοια του ορίου. Η δειλά εμφανιζόμενη έννοια του ε, ως οσοδήποτε μικρού αριθμού (*Lagrange, Cauchy*), οδηγεί το *Weierstrass* να δώσει με ακρίβεια τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης και συνέχειας, αποδεικνύει την ανεξαρτησία των εννοιών της παραγώγου και της συνέχειας και δημιουργεί τη γλώσσα των (ε,δ). Στην Ελλάδα τη σύγχρονη γλώσσα της Ανάλυσης εισάγει ο ***Ι. Καραντινός*** (1827). Ο *Weierstrass* αποδεικνύει πως *κάθε συνεχής συνάρτηση είναι το όριο μιας ακολουθίας πολυωνύμων, που συγκλίνουν ομοιόμορφα*. Ο ***Dedekind***, βασιζόμενος στον *Εύδοξο*, δίνει με τις τομές τον ορισμό του *άρρητου αριθμού*. Η ***Θεωρία των Συνόλων*** του ***G. Cantor*** δίνει το επαναστατικό έναυσμα: *Οι συναρτήσεις παύουν να θεωρούνται ορισμένες σε διαστήματα ή περιοχές σημείων, αλλά σε τυχόντα σημειοσύνολα*. Το μέτρο συνόλων ορίζεται και οι ***Baire, Borel*** και ***Lebesgue*** ανοίγουν μια νέα εποχή στη θεωρία πραγματικών συναρτήσεων. Ο *Baire* ορίζει τα πυκνά και τα τέλεια σύνολα, ο *Borel*, μεταξύ άλλων, ορίζει τις κλάσεις πραγματικών συναρτήσεων και ο *Lebesgue* επεκτείνει την έννοια του ολοκληρώματος και εισάγει τη μετρήσιμη συνάρτηση. Το θεώρημα *Weierstrass* εξακολουθεί να βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας. Ειδικότερα η 'ταχύτητα' προσεγγίσεως μελετάται από τους ***Ch. de la Vallée-Poussin, S. Bernstein*** κ.ά. Οι κλασικές συναρτήσεις δεν 'καλύπτουν πλέον τις νέες ανάγκες' των μαθηματικών, όπως στη θεωρία των γενικευμένων επιφανειών (***L.C. Young***), στην Αρμονική Ανάλυση (***Bochner***), στη Θεωρητική Φυσική ('συνάρτηση' ***P.A.M. Dirac***). Στην αρχή της θεωρίας των Τοπολογικών Διανυσματικών Χώρων η έννοια της γενικευμένης συναρτήσεως δεν ήταν αρκετά σαφής. Ο ***L. Schwarz*** (1945) ορίζει τη *'γενικευμένη συνάρτηση'* (*κατανομή*) *ως συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στο χώρο των διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα.*

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(18ος, 19ος και 20ος αιώνας)

Με την εμφάνιση του απειροστικού Λογισμού εμφανίστηκαν και διάφοροι τύποι διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ). Ο ***L. Euler*** θεμελιώνει τη θεωρία με τη χρήση κριτηρίων ολοκληρωσιμότητας. Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής οδηγεί στη ΔΕ μερικών παραγώγων $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, της οποίας η μελέτη αρχίζει το 1747 με τους *Euler, D' Alembert* και *D. Bernoulli.* Οι εφαρμογές των ΔΕ επεκτείνονται στη Φυσική και στη Μηχανική. Ο *Lagrange* δίνει το γενικό τρόπο επίλυσης ΔΕ με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ) 1^{ης} τάξεως και ο ***G. Monge*** παρουσιάζει τη γεωμετρική τους ερμηνεία. Στα πλαίσια αναμόρφωσης της Ανάλυσης από τον *Cauchy* εντάσσεται και το έργο του που αφορά τις ΔΕ. Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης λύσεως σε προβλήματα αρχικών τιμών ΔΕ 1^{ης} τάξεως δίνεται από τον *Cauchy* και βελτιώνεται από τον ***R. Lipschitz*** και αργότερα από τον ***E. Picard.*** Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα τα θεωρήματα υπάρξεως και μοναδικότητας της λύσεως ΔΕ και συστημάτων ΔΕ αποτελούν το σημαντικότερο θέμα έρευνας (*E. Picard, G. Peano).* Το 18^{ο} αιώνα η έρευνα επικεντρώνεται στη μελέτη των γραμμικών ΔΕ, γεγονός που οφείλεται στη σημασία που αυτές έχουν για τη Μηχανική και τη Φυσική. Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα (1858) αποσαφηνίζεται το πρόβλημα της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων ΔΕ (***E.B. Christoffel***). Τα προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής οδηγούν στη μελέτη συνοριακών προβλημάτων (*Sturm-Liouville,* 1830). Ο ***V. Steklov*** ερευνά τις διάφορες γενικεύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών, η οποία βοήθησε στην ανάπτυξη ασυμπτωτικών μεθόδων στη θεωρία ΔΕ και στη Φασματική Ανάλυση. Στη θεωρία γραμμικών και μη γραμμικών ΜΔΕ, η ανάγκη αποδοχής «λύσεων» που δεν ήσαν παραγωγίσιμες συναρτήσεις οδήγησε τους *Léray* και *Sobolev* να εισάγουν την έννοια της γενικευμένης παραγώγου.

Ο **19^{ος}** αιώνας είναι η εποχή άνθησης της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων με προεξάρχοντες τους *Cauchy, Briot* και *Bouquet*, που δημιουργούν έτσι την αναλυτική θεωρία ΔΕ, την οποία συστηματικοποιεί ο *Weierstrass.* Η επιτυχία της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων και της αναλυτικής θεωρίας ΔΕ είχε ως αποτέλεσμα να παραμεριστεί η θεωρία των ΔΕ πάνω στον **R** (ΔΕ/**R**)στο διάστημα 1840-1860. Με τις εργασίες όμως του ***H. Poincaré*** (~ 1880) στην ποιοτική θεωρία ΔΕ ανανεώνεται το ενδιαφέρων των μαθηματικών για τη μελέτη των ΔΕ/**R**.

Η δημιουργία της ποιοτικής θεωρίας ΔΕ προέκυψε από προβλήματα Ουράνιας Μηχανικής (*Poincaré*) και δυναμικής ρευστών (*Zhukovski*). Η ιδιαιτερότητα αυτών των προβλημάτων (προβλήματα σταθερής τροχιάς) καθορίζουν την προσέγγιση του *Poincaré* στη μελέτη της συμπεριφοράς των ολοκληρωτικών καμπύλων του επιπέδου. Σε μια σειρα εργασιών του (~ 1880) ο *Poincaré* εισάγει τις βασικές έννοιες, ενώ η γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος οδηγεί τον *Poincaré* στη Συνδιαστική Τοπολογία. Την έρευνα του *Poincaré* στην ποιοτική θεωρία συνεχίζει ο ***A. M. Ljapunoff*** , οπότε αρχίζει και και αποκτά μεγάλη σημασία τόσο για τα Μαθηματικά, όσο και τη Μηχανική του 20^{ου} αιώνα.

Στον περίφημο λόγο του στο 2^{ο} Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στο Παρίσι (1900) ο 38-χρονος ***D. Hilbert*** εφιστά την προσοχή των μαθηματικών σε προβλήματα που προάγουν την επιστήμη, μεταξύ των οποίων δύο αναφέρονται στις ΔΕ. Το 1^{ο} (Πρόβλ. Ν^{ο} 10) ανήκει στην ποιοτική θεωρία των ΔΕ και το 2^{ο} (Πρόβλ. Ν^{ο} 21) στην αναλυτική θεωρία των ΔΕ.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ
(18ος , 19ος και 20ος αιώνας)

Αν και προβλήματα του Λογισμού των Μεταβολών (ΛΜ) εμφανίζονται στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, η ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού έδωσε τη δυνατότητα στους *Euler* και *Lagrange* κατά τον 18^{ο} αιώνα να θεμελιώσουν το ΛΜ και να δώσουν τις πρώτες συνθήκες ακροτάτων. Η εξίσωση των *Euler-Lagrange* θα παίξει ένα σημαντικό ρόλο, κυρίως στη Φυσική (π.χ. αρχή του *Fermat* για τη διάδοση του φωτός, τις αρχές ελάχιστης δράσης του *Maupertius*, καθορισμός κινήσεων στην Αναλυτική Μηχανική). Η μελέτη των συνθηκών για ακρότατα συνεχίζεται τόσο το 18^{ο} , όσο και το 19^{ο} αιώνα με τις εργασίες των *Legendre, Jacobi* και *Weierstrass.* Η εργασία του φυσικού ***J. Plateau*** και το ομώνυμο πρόβλημα δίνουν καινούργια ώθηση στον κλάδο.

Στις αρχές του 20^{ου} αι. ο ΛΜ είναι μια αποκρυσταλλωμένη θεωρία. Η συμβολή του ***Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή*** στη διαμόρφωση του ΛΜ ήταν σημαντικότατη και διεθνώς αναγνωρισμένη από διαπρεπείς μαθηματικούς-φυσικούς (*Max Plank, Alfred Pringsheim* κ.ά). Η έννοια του πεδίου που εισήγαγε ο Καραθεοδωρής είχε για το ΛΜ απρόβλεπτες συνέπειες, από την οποία συνάγει μια ανισότητα και θέτει τις βάσεις για την αρχή *Δυναμικού Βέλτιστου Ελέγχου.* Η ανισότητα εμφανίστηκε 20 χρόνια αργότερα (μετά το θάνατο του Καραθεοδωρή) με άλλο όνομα(*) , *ανισότητα Bellmann.* Από τις εργασίες του Καραθεοδωρή στο ΛΜ συνάγει ο ***J. Pesch*** την περίφημη *αρχή μεγίστου της βέλτιστης πλοήγησης.*

(*) Είναι διαπιστωμένο ότι ο Bellmann γνώριζε από τις εργασίες του Καραθεοδωρή την ανισότητα και γι' αυτό γνωστοποίησε την ανισότητα μετά το θάνατο του Καραθεοδωρή.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Η Θεωρία Συνόλων (ΘΣ) που διετύπωσε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ο ***G. Cantor*** υπεισέρχεται συστηματικά στους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Στην Ελλάδα την εισάγει το 1918 ο ***Π. Ζερβός***. Η ΘΣ προκάλεσε την 3^{η} μεγάλη κρίση στα Μαθηματικά. Η 1^{η} ήταν η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών (Πυθαγόρειοι, 5^{ος} αιώνας μ. Χ.), η 2^{η} προέκυψε μετά τη δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού (διαμάχες *Berkeley, Robins*, κ.ά) και η 3^{η} δημιουργήθηκε με τα παράδοξα της ΘΣ (*Burali-Forti, Russel*). Με τη Θεωρία Συνόλων «καταργείται» η έννοια της μονάδας και εμφανίζεται η έννοια του συνεχούς, που με την έννοια της δύναμης (ή ισχύος) συνόλου επιτρέπει την ταξινόμηση των συνόλων.

Ο πληθάριθμος (cardinal) οδηγεί στην υπερπεπερασμένη αρίθμηση και την υπερπεπερασμένη επαγωγή. Ο διατακτικός (ordinal) αριθμός οδηγεί στα διατεταγμένα ή καλώς διατεταγμένα σύνολα και στο *αξίωμα της επιλογής* του ***E. Zermelo*** (1904): *Αν για την απεικόνιση F*: *X√ (Y)* (δυναμοσύνολο του *Y*) *ισχύει F(x)πΔ για κάθε x X, τότε υπάρχει μια απεικόνιση φ*:*X Y τέτοια, ώστε φ(x) F(x) για κάθε x X* ή πιο ειδικά: *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Το αξίωμα αυτό (που παίζει τον ανάλογο ρόλο με το 5^{ο} *αίτημα του Ευκλείδη* στις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες) και οι η χρήση των υπερπεπερασμένων αριθμών οδήγησαν τα παράδοξα της ΘΣ και στο διαχωρισμό των μαθηματικών στους 'ιδεαλιστές', που αποδέχονται το αξίωμα του *Zermelo*, και στους 'εμπειριστές' που δεν αποδέχονται το αξίωμα αυτό. Στους ιδεαλιστές ανήκουν οι *D. Hilbert, J. Hadamard, W. Sierpinski* στους εμπειριστές ανήκουν οι *E. Borel, H. Lebesgue, N. Lusin*. Τα 'πέντε γράμματα για τη ΘΣ' που αντάλλαξαν οι *Baire, Borel, Hadamard* και *Lebesgue* αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κείμενο για τα Μαθηματικά. Ο *E. Borel* γράφει τα «*Παράδοξα του απείρου*, Παρίσι 1946. Οι έρευνες του *Zermelo* συνεχίζονται από τους *Fraenkel* (*Σύστημα Zermelo & Fraenkel*), *Bernays, von Neumann* και *Gödel* (*The consistency of the continuum hypothesis*, Princeton 1940) και διατυπώνουν θεωρήματα που γίνονται αποδεκτά.

Ο *Gödel* αποδεικνύει ότι, αν η ΘΣ θεμελιωμένη στα αξιώματα, χωρίς το αξίωμα επιλογής, δεν είναι αντιφατική, τότε η ΘΣ που θα προκύψει όταν συμπεριλάβουμε και το αξίωμα αυτό ή την υπόθεση του συνεχούς δεν είναι αντιφατική.

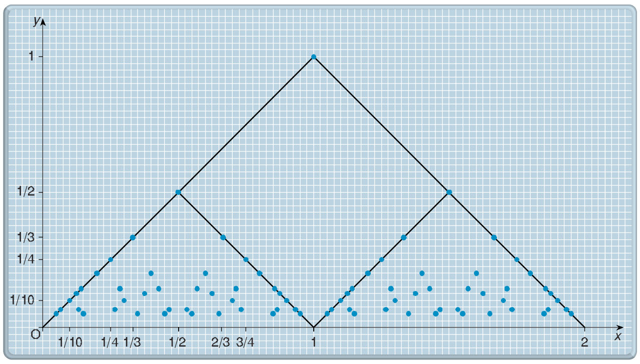
Στα τέλη του 19^{ου} αι. ο ***C. Jordan*** εισάγει την έννοια του μέτρου, ανεξάρτητα από τη δομή του προς 'μέτρηση' συνόλου. Οι αδυναμίες της θεωρίας του *Jordan* οδηγούν τον *Borel* να εισάγει το *μέτρο Borel*. Αργότερα ο *Lebesgue* εισάγει το δικό του μέτρο. Τα σύνολα '*μέτρου μηδέν*' συνδέονται με την έκφραση '*σχεδόν παντού*' και χρησιμεύουν στη θεωρία συναρτήσεων.

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ

ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΟΠΟΙΑΣ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ «ΟΣΟΔΗΠΟΤΕ ΚΟΝΤΑ»;

Του **Γεωργίου Παντελίδη**, Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $y=f(x)$ είναι μια συνεχής γραμμή, όταν το σύνολο ορισμού της Χ είναι ένα διάσημα. Ακόμη, ότι για μια συνάρτηση συνεχή σ' ένα σημείο ξ Χ οι τιμές της συνάρτησης σε όλα τα γειτονικά σημεία διαφέρουν από την f(ξ) πολύ λίγο. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι τα σημεία συνέχειας και ασυνέχειας μιας συνάρτησης μπορεί να είναι 'πυκνά', δηλαδή απείρως κοντά το ένα στο άλλο.



Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\kappa}, & \text{αν } x=\dfrac{\lambda}{\kappa},\ \lambda,\kappa\ \ \mathbb{N} \text{ πρώτοι μεταξύ τους*}\\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο και είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό σημείο ρ και μάλιστα

$$\lim_{x\ \ \rho} f(x)=0.$$

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, περιορίζουμε τη μελέτη στο $[0, +\bullet)$

Έστω τ ένας άρρητος αριθμός και ε>0, οπότε υπάρχει ν ℕ με $\nu \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους φυσικοί αριθμοί κ με $\frac{1}{\kappa} \geq \varepsilon$, οπότε και πεπερασμένου πλήθους ρητοί

$$\frac{\lambda}{\kappa}\ \ (0,\tau+1) \text{ με } \frac{1}{\kappa}\geq\varepsilon,$$

για τους οποίους ισχύει

$$f\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)=\frac{1}{\kappa}\geq\varepsilon.$$

Άρα υπάρχει περιοχή $(\tau-\delta,\tau+\delta)\ \ (0,\tau+1)$ που περιέχει μόνο ρητούς $\frac{\lambda}{\kappa}$, με $\frac{1}{\kappa}<\varepsilon$.

Επομένως, για κάθε x $(\tau-\delta,\tau+\delta)$ ισχύει

$$\Omega f(x)-f(\tau)\Omega = f(x) = \left(\begin{cases}\dfrac{1}{\kappa}, & \text{αν } x=\dfrac{\lambda}{\kappa}\\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}\right)<\varepsilon.$$

$$\text{δηλ. } \lim_{x\ \ \tau} f(x)=0=f(\tau),$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο τ.

Έστω $\rho=\frac{\alpha}{\beta}$ ένας οποιοσδήποτε ρητός (α, β ℕ πρώτοι μεταξύ τους), οπότε $f(\rho)=\frac{1}{\beta}$. Τότε για την ακολουθία άρρητων αριθμών $x_n=\rho+\frac{\sqrt{2}}{n}$ ισχύει:

$$x_n=\rho+\frac{\sqrt{2}}{n}\ \ \rho$$

και $$f(x_n)=f\left(\rho+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=0\ \ \ 0\ \pi\ f(\rho)=\frac{1}{\beta},$$

που σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο ρητό σημείο ρ.

Για ε>0, όπως και πιο πάνω, υπάρχει περιοχή

* Από τη Θεωρία Αριθμών γνωρίζουμε: Κάθε ρητός αριθμός ρ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\lambda}{\kappa}$, με λ, κ πρώτους μεταξύ τους και κ>0.

(ρ–δ, ρ+δ) που (εκτός από το ρ) περιέχει μόνο ρητούς $\frac{\lambda}{\kappa}$, για τους οποίους ισχύει

$$f\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa} < \varepsilon.$$

Άρα

- για κάθε ρητό σ (ρ–δ, ρ+δ) με σπρ ισχύει $f(\varepsilon)<\varepsilon$ και
- για κάθε άρρητο x (ρ–δ, ρ+δ) ισχύει $0=f(x)<\varepsilon$, που σημαίνει

$$\lim_{x \quad \rho} f(x) = 0 \ \pi \ f(\rho) = \frac{1}{\beta}.$$

Παρατήρηση 1

Δεν υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να είναι συνεχής σε κάθε ρητό και ασυνεχής σε κάθε άρρητο σημείο του $\mathbb{R}$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος: *Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης είναι σύνολο **1ης κατηγορίας**, δηλαδή είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους κλειστών διαστημάτων.* Το σύνολο των άρρητων δεν είναι τέτοιο.

Παρατήρηση2

Η συνάρτησή μας είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα [α, β], αφού τα σημεία ασυνέχειάς της είναι οι ρητοί του διαστήματος και είναι αριθμήσιμου πλήθους, δηλαδή μηδενικού μέτρου.

Εξάλλου για κάθε ν $\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_\nu = \left\{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu}{\nu}\right\}^{**}$$

και το σύνολο των ενδιάμεσων σημείων ξ_ν από άρρητα σημεία, τότε για το άθροισμα Riemann ισχύει $\rho(f, P_\nu, \xi_\nu) = 0$, οπότε

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\nu \bullet} \rho(f, P_\nu, \xi_\nu) = 0.$$

Το τελευταίο συμπέρασμα ήταν αναμενόμενο, αφού οι τιμές μιας συνάρτησης σ' ένα σύνολο μηδενικού μέτρου δεν επηρεάζουν την τιμή του ολοκληρώματος.

◆

* Περιορίζουμε τη μελέτη στο διάστημα [0, 1] χάριν απλότητας.

ΠΟΙΟΣ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ «ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΕΙ» ΤΟΝ ΗΛΙΟ ΤΕΛΕΙΟΤΕΡΑ;

Διερωτάται ο Καθηγητής του Πολυτεχνείου του Μονάχου R. Bulivsch

Για τον άνθρωπο ο Ήλιος είναι το σημαντικότερο άστρο. Βαθιά στο εσωτερικό του το υδρογόνο καίγεται σε ήλιο, από την καύση αυτή εκλύεται ενέργεια και μορφή ακτινοβολίας. Κάθε δευτερόλεπτο 4 εκατομμύρια τόνοι μετατρέπονται σε ακτινοβολία και κάθε δευτερόλεπτο ο Ήλιος γίνεται κατά 4 εκατομμύρια τόνους ελαφρύτερος. Αλλά ο Ήλιος είναι τόσο μεγάλος, ώστε μετά πάροδο δισεκατομμυρίων ετών η απώλειά του θα είναι πολύ μικρή. Η κατάσταση του Ήλιου περιγράφεται από φυσικούς νόμους, δηλαδή από ένα **σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου.** Αν λάβουμε υπόψη μας μερικά σταθερά γνωστά ποσά, όπως π.χ. η μάζα την οποία είχε το άστρο στην αρχή της ζωής του, δηλαδή όταν άρχισε η πυρηνική καύση στο εσωτερικό του, τότε βρισκόμαστε μπροστά σ' ένα επιλύσιμο πρόβλημα.

- **Ο Ήλιος** ζει ήδη 4,5 δισεκατομμύρια χρόνια, οι υπολογισμοί δείχνουν ότι ο Ήλιος θα λάμπει ομοιόμορφα ακόμη για πολύ, αλλά η ζωή θα υπάρξει πάνω στη Γη το πολύ ακόμη 1,5 δισεκατομμύρια χρόνια. Τότε θα υπάρξει τόση ζέστη, ώστε θα εξατμιστούν οι ωκεανοί.
- Ο Ήλιος θα λάμπει ακόμη 5 δισεκατομμύρια χρόνια. Πριν από το τέλος του θα διασταλεί σ' ένα τεράστιο κόκκινο αστέρα, ο οποίος θα καλύπτει σχεδόν το μισό ουρανό. Θα είναι τόσο μεγάλος όσο η τροχιά του Ερμή.

Ένα τελευταίο για τον Ήλιο: Αν ο Ήλιος ήταν λίγο μόνο μεγαλύτερος, από τις λύσεις των μαθηματικών εξισώσεων προκύπτει ότι θα καίγονταν τόσο γρήγορα, ώστε δε θα αναπτύσσονταν ζωή σε κανένα από τους πλανήτες. Αν η διάμετρός του ήταν κατά 20% μεγαλύτερη, αυτό δεν είναι πολύ, τα πάντα θα είχαν τελειώσει μετά 1 δισεκατομμύριο έτη. Πάνω στη Γη δε θα υπήρχαν ούτε φύκια. Και αν ο Ήλιος ήταν 10 φορές μεγαλύτερος, τότε μετά από μερικά εκατομμύρια (όχι δισεκατομμύρια) χρόνια όλη η καύσιμη ύλη του Ήλιου θα χανότανε. Αν ο Ήλιος ήταν μικρότερος θα ήταν καλύτερα, αλλά τώρα δε θα ήταν αρκετά ζεστός και οι πλανήτες θα έπρεπε να ήταν πλησιέστερά του, αυτό όμως θα ήταν για τη ζωή πολύ επικίνδυνο και κατά πάσα πιθανότητα δεν θα είχε καν αναπτυχθεί.

Γ.Π.

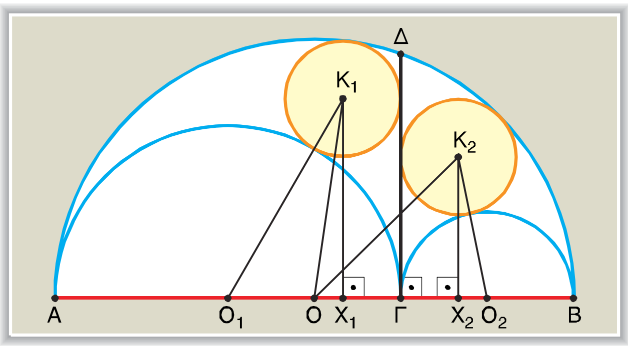
ΣΧΕΤΙΚΑ με τους ΔΙΔΥΜΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Του **Γεωργίου Στάμου**, Μαθηματικού, Καθηγητή Α.Π.Θ.

Ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.) υπήρξε ένας από τους πιο σημαντικούς ερευνητές της αρχαιότητας. 'Ηταν ένας πολύ μεγάλος μαθηματικός, συνάμα δε και ένας πολύ αξιόλογος μηχανικός (φυσικός). Το εκτεταμένο (διασωθέν) έργο του διαθέτει πρωτοτυπία και υψηλή ποιότητα. Η λύση δύσκολων προβλημάτων, με τις γνώσεις μάλιστα εκείνης της εποχής, προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μεταγενέστερων σπουδαίων επιστημόνων. Δεν είναι τυχαία π.χ. η άποψη του G.W.Leibniz: *«Εκείνος, ο οποίος κατανοεί τον Αρχιμήδη, θαυμάζει ολιγώτερον τας επινοήσεις των νεωτέρων μεγάλων ανδρών»*.

Στο παρόν άρθρο θα αναφερθούμε στην πιο ενδιαφέρουσα ίσως ιδιότητα ενός σχήματος, το οποίο ο Αρχιμήδης ιδιαίτερα μελέτησε στο βιβλίο του «Λήμματα». Το σχήμα αυτό ορίζεται ως εξής : Στο επίπεδο, θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τυχόν σημείο αυτού Γ και τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ και ΓΒ, τα οποία κείνται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τον φορέα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται από τα τρία ημικύκλια καλείται **'Αρβηλος** (= το στρογγυλό κοπίδι των τσαγγαράδων).

Θεωρούμε τώρα την ημιχορδή ΓΔ, η οποία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και τους δύο κύκλους, οι οποίοι εφάπτονται στην ημιχορδή και που ο ένας είναι εφαπτόμενος στα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ και ο άλλος στα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΓΒ. Κατά τον Αρχιμήδη, **οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ίσοι.** Στη διεθνή βιβλιογραφία οι κύκλοι αυτοί είναι γνωστοί ως **«δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη»**.



Σχήμα 1

Η παραπάνω ιδιότητα του Αρβήλου έχει αποδειχθεί με διαφόρους τρόπους. Εμείς δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη του Αρχιμήδη, αλλά μία άλλη πολύ απλούστερη που σήμερα μάς είναι γνωστή. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε και μία επέκταση του αποτελέσματος του Αρχιμήδη.

Ας είναι K_1, K_2 τα κέντρα των κύκλων του Αρχιμήδη X_1, X_2 οι προβολές αυτών στο ΑΒ και Ο, O_1, O_2 τα κέντρα των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ και ΓΒ αντίστοιχα (Σχ. 1). Από τα ορθογώνια τρίγωνα OX_1K_1 και $O_1X_1K_1$ έχουμε τη σχέση

$$OK_1^2 - OX_1^2 = O_1K_1^2 - O_1X_1^2\,. \qquad (1)$$

Αν r_1, r_2 είναι οι ακτίνες των κύκλων του Αρχιμήδη και θέσουμε $AB=2R$, $A\Gamma=2R_1$, $\Gamma B=2R_2$, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$OK_1 = R_1 + R_2 - r_1,\ OX_1 = R_1 - R_2 - r_1, \qquad (2)$$

$$O_1K_1 = R_1 + r_1,\ O_1X_1 = R_1 - r_1. \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) θα προκύψει

$$r_1 = \frac{R_1R_2}{R}\,. \qquad (4)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OX_2K_2, $O_2X_2K_2$ και τη σχέση

$$OK_2^2 - OX_2^2 = O_2K_2^2 - O_2X_2^2, \qquad (5)$$

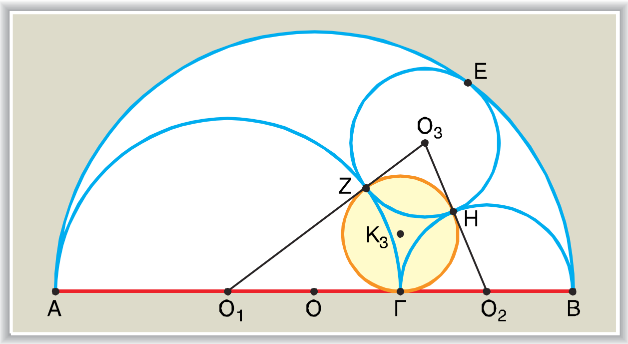
θα προκύψει, ακολουθώντας ανάλογη πορεία, η ακτίνα του δεύτερου κύκλου του Αρχιμήδη

$$r_2 = \frac{R_1R_2}{R}\,. \qquad (6)$$

Οι δύο λοιπόν κύκλοι του Αρχιμήδη πράγματι είναι ίσοι.

Πριν από μερικές δεκαετίες ανεκαλύφθη από τον αμερικανό L. Bankoff ένας ακόμη κύκλος που είναι ίσος με τους δύο κύκλους του Αρχιμήδη. Ο κύκλος αυτός προκύπτει ως εξής: Θεωρούμε τον κύκλο (με κέντρο O_3 και ακτίνα R_3), ο οποίος εφάπτεται των αρχικών τριών ημικυκλίων στα σημεία Ε, Ζ, Η (Σχ.2). Θα δείξουμε, ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Ζ, Η και Γ είναι ίσος με τους κύκλους του Αρχιμήδη. Ας είναι K_3 το κέντρο και r_3 η ακτίνα αυτού. Προφανώς ο κύκλος (K_3, r_3) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $O_1O_2O_3$. Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Πάππου, το ύψος του τριγώνου $O_1O_2O_3$ που αντιστοιχεί στην πλευρά O_1O_2 είναι διπλάσιο της ακτίνας R_3 (αποδείξτε το). Επομένως για το εμβαδόν ε του τριγώνου $O_1O_2O_3$ θα ισχύει

$$\varepsilon = R_3(R_1+R_2). \qquad (7)$$



Σχήμα 2

Αν τώρα γίνει χρήση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου και του τύπου του Ήρωνα, θα έχουμε αντίστοιχα

$$\varepsilon = r_3(R_1+R_2+R_3), \qquad (8)$$

$$\varepsilon = \sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}. \qquad (9)$$

Ισχύουν επομένως οι ισότητες

$$R_3(R_1+R_2) = r_3(R_1+R_2+R_3) = \sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)} = \frac{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}{r_3(R_1+R_2+R_3)} = \frac{R_1R_2R_3}{r_3}, \qquad (10)$$

Τότε όμως προκύπτει

$$r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1R_2}{R}, \qquad (11)$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο κύκλος (K_3, r_3) είναι ίσος με τους κύκλους του Αρχιμήδη. Επομένως έχουμε «τρίδυμους κύκλους» και διερωτάται κανείς μήπως υπάρχει και τέταρτος ίσος κύκλος.

Παρατήρηση

Από την ισότητα $R_3(R_1+R_2)=r_3(R_1+R_2+R_3)$ και με χρήση της σχέσης (11) προκύπτει άμεσα η ακτίνα του κύκλου (O_3, R_3):

$$R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1^2+R_1R_2+R_2^2}. \qquad (12)$$

Βιβλιογραφία

1. L. Bankoff : Are the twin circles of Archimedes really twins ? Math. Magazine 47 (1974), 214-218.
2. Ε. Σταμάτης : Αρχιμήδους Άπαντα, τομ. Γ'. Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι 1974.

Αποσπάματα από το νέο βιβλίο των Εκδόσεων ΖΗΤΗ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ»

Των **Γ. Θωμαΐδη - Α. Πούλου,** Μαθηματικών

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- *Επισκόπηση της ύλης*
- *Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη*
- *Μελέτη ειδικών σχημάτων*
- *Ερωτήσεις προφορικής εξέτασης και αξιολόγησης*
- *Εκτενή βιβλιογραφία*
- *Ανάλυση θεωρητικών ζητημάτων*
- *Ασκήσεις και Προβλήματα*
- *Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών*
- *Θέματα συνθετικών δημιουργικών εργασιών*

Τα αποσπάσματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά της ύλης και των περιεχομένων του νέου βιβλίου:

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

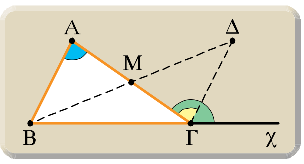
(4ο κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες)

Ο ρόλος της "βοηθητικής γραμμής" στις αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (μέρος δεύτερο)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο σχολιάσαμε τη σημασία της "βοηθητικής γραμμής" στις αποδείξεις των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αναφέραμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Στην ύλη του παρόντος κεφαλαίου ανήκει το πιο διάσημο, ίσως, σχετικό παράδειγμα, η "βοηθητική" παράλληλη ευθεία που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

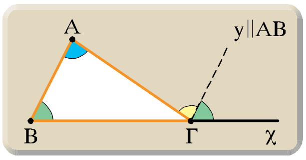
Η απόδειξη αυτή, που περιέχεται σ' όλα τα σύγχρονα βιβλία Γεωμετρίας, προέρχεται κατ' ευθείαν από τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη. Για να καταλάβουμε καλύτερα τη σημασία της και τον τρόπο που ενδεχομένως επινοήθηκε, θα πρέπει να έχουμε υπόψη τη στενή σχέση των δύο επόμενων γεωμετρικών προτάσεων από τα "Στοιχεία":

Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης η εκτός γωνία εκατέρας των εντός και απεναντίον γωνιών μείζων εστίν



Βιβλίο Ι, πρόταση 16

Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης η εκτός γωνία δυσί ταις εντός και απεναντίον ίση εστίν, και αι εντός του τριγώνου τρεις γωνίαι δυσίν ορθαίς ίσαι εισίν.

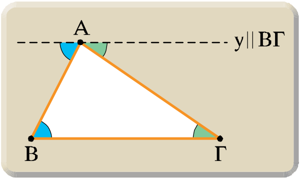


Βιβλίο Ι, πρόταση 32

Η πρώτη πρόταση αναφέρεται στην ιδιότητα κάθε εξωτερικής γωνίας τριγώνου να είναι μεγαλύτερη καθεμιάς των απέναντι εσωτερικών γωνιών, ενώ η δεύτερη δείχνει πόσο ακριβώς μεγαλύτερη είναι (ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, άρα μεγαλύτερη από καθεμιά κατά το μέτρο της άλλης). Από το τελευταίο αποτέλεσμα συνάγεται βέβαια αμέσως ότι, το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές (στα σημερινά βιβλία γίνεται το αντίστροφο).

Η απόδειξη της πρώτης πρότασης στηρίζεται, όπως γνωρίζουμε, στην προέκταση της διαμέσου ΒΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και στη χρησιμοποίηση των ίσων τριγώνων ΑΒΜ και ΔΜΓ που δημιουργούνται (βλέπε το πρώτο μέρος αυτού του θεωρητικού ζητήματος που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Όλα τα προηγούμενα γίνονται πριν από την ανάπτυξη της θεωρίας των παραλλήλων. Από την ισότητα όμως των (εντός εναλλάξ) γωνιών $\hat{Α}$ και $Μ\hat{Γ}Δ$ προκύπτει τώρα ότι η ΓΔ είναι παράλληλη προς την ΑΒ, γεγονός που συνεπάγεται ότι, η γωνία $\hat{Β}$ είναι ίση με την $Δ\hat{Γ}χ$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά), άρα η εξωτερική γωνία $Α\hat{Γ}χ$ ίση με το άθροισμα $\hat{Α} + \hat{Β}$.

Τα προηγούμενα κάνουν φανερό το λόγο για τον οποίο ο Ευκλείδης αρχίζει την απόδειξη της πρότασης Ι, 32 φέρνοντας από το σημείο Γ τη "βοηθητική" παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ του τριγώνου.



Από διδακτική σκοπιά φαίνεται ίσως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη τη "βοηθητική" παράλληλη από το σημείο Α προς την πλευρά ΒΓ (έτσι γίνεται χρήση μόνο εντός εναλλάξ γωνιών). Αυτή, όπως και άλλες εναλλακτικές θέσεις της παράλληλης, ήταν επίσης γνωστές κατά την αρχαιότητα και αναφέρονται από τον Πρόκλο (5ος αι. μ. Χ.) που έγραψε σχόλια για το πρώτο βιβλίο των "Στοιχείων". Όπως δείξαμε όμως παραπάνω, η συσχέτιση των προτάσεων Ι, 16 και Ι, 32 εξηγεί με πειστικό τρόπο τις επιλογές του Ευκλείδη και αναδεικνύει τη σημασία δύο "βοηθητικών γραμμών" που χρησιμοποιούνται συστηματικά στις γεωμετρικές αποδείξεις:

- Η προέκταση της διαμέσου (ή άλλης χαρακτηριστικής ευθείας) ενός τριγώνου κατά ίσο τμήμα ή ένα μέρος αυτής.
- Η σχεδίαση της παράλληλης προς μια πλευρά (ή άλλη χαρακτηριστική ευθεία) ενός τριγώνου.

Η διδασκαλία των προηγούμενων προτάσεων (θεωρήματα 3.14. και 4.9. του σχολικού βιβλίου) μας δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε με συστηματικό τρόπο στην έννοια της "βοηθητικής γραμμής".\

ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(5ο κεφάλαιο: Τετράπλευρα)

Ασκήσεις εφαρμογής των ορισμών και κριτηρίων των παραλληλογράμμων

Από έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλά και από την καθημερινή διδακτική εμπειρία έχει διαπιστωθεί ότι, πολύ συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη διαφορά ανάμεσα σε αναγκαία και ικανή συνθήκη. Αυτή η δυσκολία διάκρισης είναι ιδιαίτερα φανερή στην περίπτωση των παραλληλογράμμων, όπου παρατηρείται γενική σύγχυση ανάμεσα σε ορισμούς, ιδιότητες και κριτήρια. Για παράδειγμα, είναι συχνό φαινόμενο στις εξετάσεις της Α Λυκείου να ζητείται η απόδειξη ενός κριτηρίου (π.χ., "αν σ' ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο") και οι μαθητές να αποδεικνύουν (συνήθως με άψογο τρόπο!) την αντίστοιχη ιδιότητα (δηλαδή, "σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται").

Ένα τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η συστηματική εξάσκηση των μαθητών στη χρησιμοποίηση των ορισμών και των κριτηρίων, με κατάλληλα επιλεγμένες ασκήσεις στις οποίες εμφανίζονται τα διάφορα είδη των παραλληλογράμμων.

Η κλασική άσκηση αυτής της ενότητας αφορά το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών ενός άλλου τετραπλεύρου:

20. α) Τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

(εφαρμογή της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

β) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου, ενώ τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.

(άσκηση 3 Α ομάδας της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

γ) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές τετραγώνου, αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ έχει ίσες και κάθετες διαγώνιες.

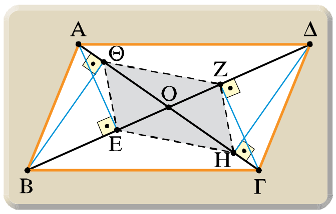
(άσκηση 4 Α ομάδας της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

δ) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου, αν και μόνο αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

(άσκηση 6 Α ομάδας της § 5.4. του σχολικού βιβλίου)

Στις ασκήσεις που ακολουθούν παρουσιάζονται διάφορα σχήματα στα οποία εμφανίζονται παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα και τραπέζια:

21. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τις προβολές Ε και Ζ των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΒΔ.



α) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ.

β) Αν Θ και Η είναι οι προβολές των κορυφών Β και Δ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΑΓ να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Μπορεί το παραλληλόγραμμο ΕΘΖΗ να είναι ρόμβος;

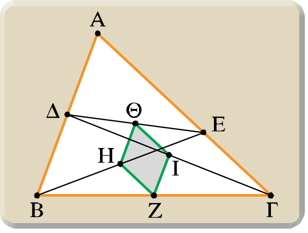
Απόδειξη:

α) Είναι η άσκηση 3 Β ομάδας της § 5.1. του σχολικού βιβλίου.

β) Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα είναι ΟΕ = ΟΖ. Για τον ίδιο λόγο (από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΟΘ και ΔΟΗ που είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και δύο οξείες γωνίες ίσες) είναι ΟΘ = ΟΗ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι διαγώνιες ΕΖ, ΗΘ του τετραπλεύρου ΕΘΖΗ διχοτομούνται στο Ο, άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αυτό συμβαίνει όταν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Τότε το τρίγωνο ΘΕΖ είναι ισοσκελές, επειδή το ΘΟ είναι διάμεσος και ύψος. Άρα ΘΕ = ΘΖ και επομένως το παραλληλόγραμμο ΕΘΖΗ είναι επίσης ρόμβος. ▲

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Ζ, Η, Θ και Ι είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΕ, ΔΕ και ΔΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος.



Απόδειξη:

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ και ΙΖ ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών στα τρίγωνα ΒΓΕ, ΕΒΔ, ΔΓΕ και ΓΒΔ αντίστοιχα. Άρα θα είναι

$$ZH = \frac{\Gamma E}{2} = \Theta I \text{ και } H\Theta = \frac{B\Delta}{2} = IZ\,.$$

Επειδή όμως ισχύει $\Gamma E = B\Delta$, συμπεραίνουμε ότι

$$ZH = H\Theta = \Theta I = IZ$$

και άρα το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος. ▲

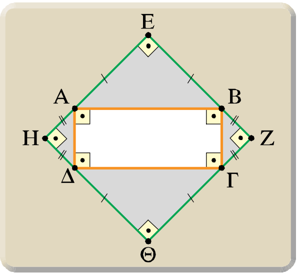
23. Στις πλευρές ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΘ και ΔΑΗ. Να δείξετε ότι το ΕΖΘΗ είναι τετράγωνο.

(Σχολή Δοκίμων 1947 & Γεωπονική Σχολή 1948)

Απόδειξη:

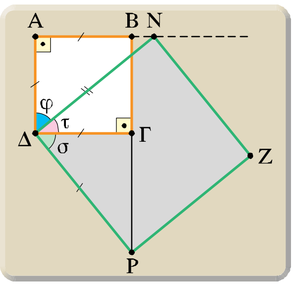
Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι είναι

$$E\hat{A}H = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$



και επομένως τα σημεία Ε, Α, Η είναι συνευθειακά. Το ίδιο ισχύει προφανώς και για τις τριάδες σημείων (Ε, Β, Ζ), (Ζ, Γ, Θ) και (Θ, Δ, Η). Άρα το ΕΖΗΘ είναι τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες, δηλαδή ένα ορθογώνιο. Επίσης ισχύει $EA = EB$ (επειδή ΕΑΒ ισοσκελές) και $AH = BZ$ (επειδή τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΖΓ είναι προφανώς ίσα). Από τις τελευταίες ισότητες, με πρόσθεση κατά μέλη, βρίσκουμε $EH = EZ$. Άρα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. ▲

24. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και στην προέκταση παίρνουμε τυχαίο σημείο Ν. Επίσης προεκτείνουμε την ΒΓ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΓΡ=ΑΝ. Στη συνέχεια με πλευρές τα ΔΝ, ΔΡ κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ. Να δείξετε ότι το ΔΝΖΡ είναι τετράγωνο.



Απόδειξη:

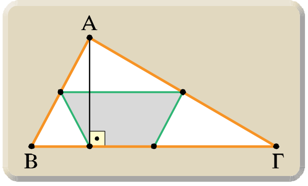
Αρκεί να δείξουμε ότι το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ έχει μία ορθή γωνία (ορθογώνιο) και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (τετράγωνο).

Στο προηγούμενο σχήμα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ, ΓΔΡ έχουν $A\Delta = \Gamma\Delta$ και $AN = \Gamma P$. Θα είναι λοιπόν ίσα και άρα ισχύει $\hat{\varphi} = \hat{\sigma}$. Επίσης είναι $\hat{\omega} = \hat{\tau}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΝ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΝ. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$P\hat{\Delta}N = \hat{\sigma} + \hat{\tau} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90^\circ \text{ και } \Delta N = \Delta P,$$

δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ έχει μία ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. ▲

25. Σε κάθε μη ορθογώνιο και σκαληνό τρίγωνο να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του και το ίχνος ενός ύψους είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.



(Άσκηση 4 Α ομάδας της § 5.4. του σχολικού βιβλίου)

Παρατήρηση: Αυτή η άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επίσης, ως πρωτογενές υλικό μιας σημαντικής δραστηριότητας για την εισαγωγή στο επόμενο κεφάλαιο (Σχήματα εγγεγραμμένα σε κύκλο) και σε μια σημαντική γεωμετρική πρόταση (κύκλος του Euler). Αφού αποδειχθεί η άσκηση, θα ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος 5.17. του σχολικού βιβλίου (σημείο τομής μεσοκαθέτων και περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου) για να δείξουν ότι οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός ισοσκελούς τραπεζίου διέρχονται από το ίδιο σημείο, δηλαδή ότι οι κορυφές του ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, αν στο προηγούμενο σχήμα φέρουμε και τα άλλα ύψη του τριγώνου, τότε γίνεται φανερό ότι τα τρία μέσα των πλευρών του τριγώνου και τα τρία ίχνη των υψών πάνω στις πλευρές ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Στη συνέχεια μπορούν να τεθούν προς συζήτηση και έρευνα τα εξής ερωτήματα:

α) Υπάρχουν άλλα χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου που ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο;

β) Εκτός από το ισοσκελές τραπέζιο, ποια άλλα τετράπλευρα είναι εγγράψιμα σε κύκλο;

26. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες και τυχαίο σημείοΣ του επιπέδου του. Να δείξετε ότι τα συμμετρικά του Σ ως προς τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου είναι κορυφές τετραγώνου.

Απόδειξη:

Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου και Ε, Ζ, Η, Θ τα συμμετρικά του Σ ως προς τα μέσα αυτά αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΣΕΘ το ευθύγραμμα τμήμα ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Άρα θα είναι

$$KN \underset{=}{\parallel} \frac{B\Delta}{2}$$

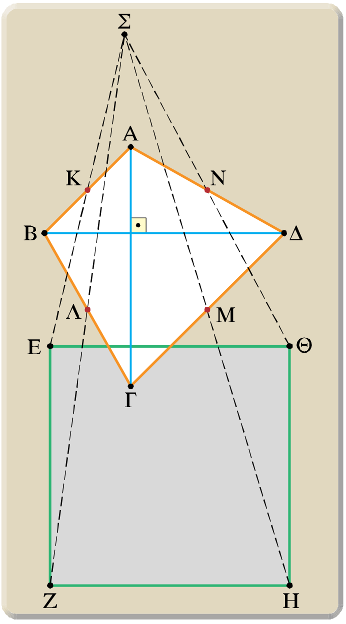
και

$$KN \underset{=}{\parallel} \frac{E\Theta}{2}$$

αντίστοιχα, από τις οποίες προκύπτει ότι

$$E\Theta \underset{=}{\parallel} B\Delta.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι ισχύει επίσης



ΖΗ $\overset{\parallel}{=}$ ΒΔ, ΕΖ $\overset{\parallel}{=}$ ΑΓ και ΘΗ $\overset{\parallel}{=}$ ΑΓ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι ίσες και παράλληλες προς τις ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες του ΑΒΓΔ. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι είναι επίσης ίσες και κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή το ΕΖΗΘ είναι ένα τετράγωνο. ▲

Παρατήρηση: Όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3 (βλέπε το θεωρητικό ζήτημα "Μελέτη τετραπλεύρων ειδικής μορφής"), τα τετράπλευρα με ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες ονομάζονται ψευδοτετράγωνα. Το προηγούμενο θέμα μπορεί λοιπόν να διατυπωθεί ως εξής:

Τα συμμετρικά ενός σημείου του επιπέδου ως προς τα μέσα των πλευρών ενός ψευδοτετραγώνου είναι κορυφές τετραγώνου.

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

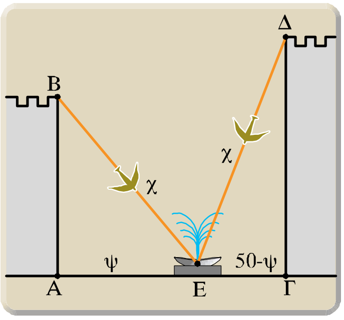
(9ο κεφάλαιο: Μετρικές σχέσεις)

Ένα πρόβλημα από το βιβλίο «Liber Abaci» του Leonadro Pisano, του επονομαζόμενου Fibonacci (1202).

1. Ανάμεσα σε δύο πύργους που έχουν ύψος 40 και 30 μέτρα αντίστοιχα και απέχουν μεταξύ τους 50 μέτρα, υπάρχει ένα συντριβάνι. Δύο πουλιά που πετούν από τους δύο πύργους προς τα κάτω, με την ίδια ταχύτητα, φτάνουν στο συντριβάνι ταυτόχρονα. Πόσο απέχει το συντριβάνι από τους δύο πύργους;

Λύση:

Το ίδιο πρόβλημα λύθηκε με τη μέθοδο των όμοιων τριγώνων στο 8^{o} κεφάλαιο. Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο διπλανό σχήμα ονομάζουμε ΑΒ και ΓΔ τους πύργους των 30 και 40 μέτρων αντίστοιχα. Αν Ε η θέση του συντριβανιού, ονομάζουμε ΑΕ = y, άρα ΕΓ = 50 − y. Ονομάζουμε ΒΕ = ΕΔ = x. Με την εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΔΓ παίρνουμε τις σχέσεις:



$$30^2 + y^2 = x^2 \text{ και } (50-y)^2 + 40^2 = x^2,$$

άρα

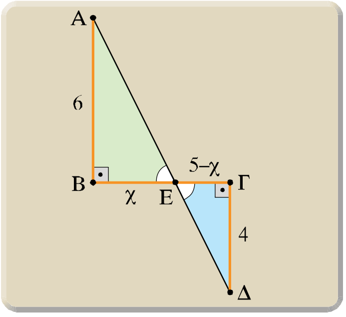
$$30^2 + y^2 = (50-y)^2 + 40^2. \qquad (1)$$

Από την επίλυση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι $y = 40$. Άρα $x = 50$. Αυτό σημαίνει ότι, το συντριβάνι απέχει 50 μέτρα από την κορυφή κάθε πύργου, ενώ από τις βάσεις τους 40 και 10 μέτρα αντίστοιχα. ▲

2. Ένα πλοίο ταξιδεύει 6 km προς Νότο, στη συνέχεια 5 km προς Ανατολάς και τέλος 4 km προς Νότο. Πόσο μακριά βρίσκεται από το σημείο εκκίνησης;

Λύση:

Στο διπλανό σχήμα ονομάζουμε Α το σημείο εκκίνησης, Β το τέλος της διαδρομής των 6 χιλιομέτρων, Γ το τέλος της διαδρομής προς τα ανατολικά και Δ το τελικό σημείο. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΕΓΔ προκύπτει ότι



$$\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \text{ ή } \frac{6}{x} = \frac{4}{5-x}$$

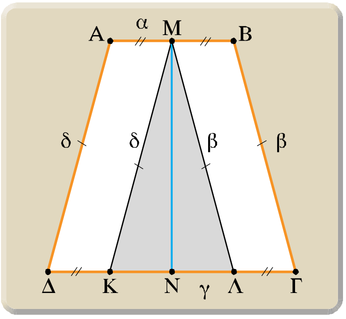
δηλαδή $x = 3$. Επειδή ΑΔ = ΑΕ + ΕΔ μπορούμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος να βρούμε ότι

$$A\Delta = 5\cdot\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ km}$$ ▲

3. Γνωρίζουμε ότι, σε κάθε τραπέζιο μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ των μέσων των μη παράλληλων πλευρών του, χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε μετρήσεις στο εσωτερικό του χωρίου του τραπεζίου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση των μέσων των βάσεων, όταν γνωρίζουμε τα μήκη όλων των πλευρών του τραπεζίου;

Λύση:

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Μ, Ν τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και α, β, γ, δ τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ στη μεγάλη βάση ΓΔ ώστε ΜΚ $\overset{\parallel}{=}$ ΑΔ και ΜΛ $\overset{\parallel}{=}$ ΒΓ. Τότε



$$AM = \Delta K = \frac{\alpha}{2} = MB = \Lambda\Gamma.$$

Άρα

$$K\Lambda = \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \gamma - \alpha.$$

Επίσης, ΜΚ = δ και ΜΛ = β. Στο τρίγωνο ΜΚΛ η ΜΝ είναι διάμεσος του και το μήκος της μπορεί να υπολογιστεί από το 1^{o} θεώρημα διαμέσων. Έτσι,

$$MN^2 = \frac{2\cdot\beta^2 + 2\cdot\delta^2 - (\gamma-\alpha)2}{4}.$$ ◆

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ και ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Του **Ανδρέα Ν. Σβέρκου**, Μαθηματικού, Σχολικού Συμβούλου

Η διαφορική εξίσωση Q =kQ

Σε πολλές φυσικές διαδικασίες ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους Q ως προς το χρόνο t είναι ανάλογος της ποσότητας του μεγέθους. Έτσι, σε αντίστοιχα προβλήματα, χρειάζεται να βρούμε μια συνάρτηση $Q=Q(t)$, η οποία σύμφωνα με τον ορισμό των αναλόγων μεγεθών, πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με χωρζόμενες μεταβλητές $Q\ (t)=kQ(t)$, όπου k μια σταθερά. (βλ. Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Γ Ενιαίου Λυκείου σελίδα 319, ΟΕΔΒ 1999).

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης, που περιέχεται στο βιβλίο, είναι

$$Q(t) = Ce^{kt}.$$

Ειδικότερα, όταν γνωρίζουμε την τιμή της Q κατά τη χρονική στιγμή t_0 (π.χ. $t=0$), δηλαδή την $Q(t_0)$, τότε η σταθερά C που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή συνθήκη είναι $C=Q(t_0)e^{-kt_0}$ και η ζητούμενη συνάρτηση δίνεται από την ισότητα:

(*) $$Q(t) = Q(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

και για $t=0$ είναι

$$Q(t) = Q(0)e^{kt} = Q_0e^{kt}.$$

Η συνάρτηση αυτή εκφράζει το νόμο της **εκθετικής μεταβολής**. Ειδικότερα, αν $k>0$ (αντ. $k<0$) λέμε ότι το Q ακολουθεί την **εκθετική αύξηση** (αντ. **απόσβεση**) (βλ. Μαθηματικά Β Ενιαίου Λυκείου σελ. 130 ΟΕΔΒ 1999).

Θα παρουσιάσουμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, τη σημασία και χρησιμότητα του νόμου της εκθετικής μεταβολής.

Εκθετική αύξηση

Παράδειγμα 1

Είναι γνωστό ότι ένας πληθυσμός βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό (ευθέως) ανάλογο προς το μέγεθός του. Αν υποθέσουμε ότι αρχικά, δηλαδή για $t=0$, ο πληθυσμός ήταν 200 και 5 ώρες αργότερα ήταν 450, τότε ποιος ήταν ο πληθυσμός όταν $t=2$ και ποιος θα είναι όταν $t=10$;

Λύση:

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή του πληθυσμού ακολουθεί την εκθετική μεταβολή. Η συνάρτηση του πληθυσμού P(t), σύμφωνα με την εξίσωση (*), δίνεται από την ισότητα

$$P(t)=P_0\cdot e^{kt}=200\cdot e^{kt},$$

στην οποία όμως δε γνωρίζουμε τη σταθερά k. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$P(5)=450 \quad ή \quad 450=200\cdot e^{k5}.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$$e^{5k} = \frac{450}{200} = \frac{9}{4} \quad ή \quad 5k = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \quad ή \quad k = \ln\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$ή \qquad kt = \ln\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}} \qquad e^{kt} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

Επομένως, με τα δεδομένα του προβλήματος, η εκθετική μεταβολή δίνεται από τη συνάρτηση

$$P(t) = P_0\cdot e^{kt} = 200\cdot e^{kt}$$

$$= 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

Έτσι για $t=2$ και $t=10$ ο πληθυσμός είναι

$$P(2) = 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{5}} \approx 277$$

και

$$P(10) = 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{10}{5}} \approx 1012$$

αντίστοιχα.

Ραδιενεργός απόσβεση

Παράδειγμα 2

Τα ραδιενεργά υλικά διασπώνται με ρυθμό ο οποίος είναι (ευθέως) ανάλογος προς την ποσότητα του ραδιενεργού υλικού.

1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να διασπαστεί η μισή ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, ή, όπως λέμε, η *ημιζωή* του ή ο *χρόνος*

υποδιπλασιασμού του, είναι ανεξάρτητος από την αρχική ποσότητα του υλικού.

2. Το ισότοπο του άνθρακα ^{11}C έχει ημιζωή 20 λεπτά. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να διασπαστεί το 90% μιας ποσότητας ^{11}C;

Λύση

1. Η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού $A(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $A'(t)=kA(t)$. Επομένως, αν A_0 είναι η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού, τότε θα έχουμε $A(t)=A_0e^{kt}$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι το μισό του ραδιενεργού υλικού θα έχει διασπαστεί σε χρόνο t_1, δηλαδή $A(t_1)=\frac{1}{2}A_0$, τότε θα ισχύει:
$$\frac{1}{2}A_0 = A(t_1) = A_0e^{kt_1} \text{ ή } e^{kt_1}=\frac{1}{2} \text{ ή } t_1=-\frac{\ln 2}{k}.$$
Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού υλικού είναι ανεξάρτητος από την αρχική ποσότητα του υλικού (εξαρτάται μόνο από τη σταθερά k).

2. Αφού ο χρόνος ημιζωής του ^{11}C είναι 20 λεπτά, θα έχουμε: $20=-\frac{\ln 2}{k}$, οπότε
$$k=-\frac{\ln 2}{20} \text{ και } A(t)=A_0e^{-\frac{\ln 2}{20}t}=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$
Όταν λοιπόν το 90% της ποσότητας θα έχει διασπαστεί, θα έχει απομείνει το 10% αυτής. Έτσι χρειάζεται να προσδιορίσουμε το χρόνο t ώστε $A(t)=0{,}1A_0$. Έχουμε διαδοχικά
$$0{,}1A_0=A(t)=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \text{ ή } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=0{,}1 \text{ ή}$$
$$t=\frac{20\cdot\ln 10}{\ln 2}\approx 66{,}4 \text{ min.}$$

Χρονολόγηση

Το ισότοπο του άνθρακα ^{14}C είναι στοιχείο ασταθές και ραδιενεργό. Στην ατμόσφαιρα, η απώλεια των ατόμων του ^{14}C λόγω της ραδιενεργού απόσβεσης, αναπληρώνεται με τη δημιουργία νέων ατόμων ^{14}C από την κοσμική ακτινοβολία. Στα φυτά η απώλεια του ^{14}C αναπληρώνεται με τη διαδικασία της φωτοσύνθεσης και στα ζώα ο ^{14}C με την κατανάλωση φυτικών τροφών. Η διαρκής αυτή αντικατάσταση έχει ως αποτέλεσμα το επίπεδο του ραδιενεργού άνθρακα να θεωρείται ότι παραμένει σταθερό τόσο στην ατμόσφαιρα όσο και στους ζωντανούς οργανισμούς. Όμως, μετά το θάνατο του οργανισμού ο ^{14}C δεν αντικαθίσταται πλέον και διασπάται με χρόνο ημιζωής 5750 χρόνια. Επομένως, η ποσότητα $Q(t)$ του ^{14}C σε ένα νεκρό οργανισμό ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $Q'(t)=kQ(t)$ για κατάλληλη αρνητική τιμή του k. Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση της ηλικίας κάποιου ευρήματος με τη βοήθεια της μεθόδου *«χρονολόγηση με άνθρακα 14»*

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η ηλικία ενός ευρήματος (δείγματος) το οποίο έχει το 70% της ποσότητας του ραδιενεργού άνθρακα που είχε όταν ζούσε.

Λύση

Αφού ο χρόνος ημιζωής είναι 5750 χρόνια, εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε:
$$Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{5750}t}=Q_0\cdot(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{5750}}=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}}.$$
Αναζητούμε το t ώστε
$$Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}}=0{,}70\cdot Q_0 \text{ ή } 2^{-\frac{t}{5750}}=0{,}70 \text{ ή}$$
$$t=-\frac{\ln(0{,}70)}{\ln 2}5750\approx 2959,$$
που σημαίνει ότι το εύρημα είναι ηλικίας 2959 ετών.

Ανατοκισμός

Αν ανατοκίσουμε ένα κεφάλαιο α με επιτόκιο ε% το χρόνο, τότε σε ν χρόνια θα εισπράξουμε ποσό
$$\alpha_\nu=\alpha\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^\nu \text{ ή } \alpha_\nu=\alpha(1+\tau)^\nu,$$
όπου $\tau=\frac{\varepsilon}{100}$ (βλ. Μαθηματικά Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 109, ΟΕΔΒ 1999).

Σε μεγάλα οικονομικά πακέτα η ενσωμάτωση των τόκων στο κεφάλαιο γίνεται περιοδικά σε μικρότερες χρονικές περιόδους [στις Τράπεζες, για μικρούς καταθέτες, κάθε έτος ή κάθε εξάμηνο]. Έτσι, αν για παράδειγμα ένα κεφάλαιο α ανατοκίζεται κάθε μήνα με ετήσιο επιτόκιο τ, οπότε το μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{\tau}{12}$, τότε στο τέλος του 2ου έτους (=24 μήνες) θα εισπράξουμε συνολικά ποσό ίσο με $\alpha\left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{24}$. Το κεφάλαιο α ανατοκίζεται ανά ημέρα, τότε σε 3 χρόνια (1095 ημέρες) θα εισπράξουμε ποσό $\alpha\left(1+\frac{\tau}{365}\right)^{1095}$.

Γενικά αν το κεφάλαιο α ανατοκίζεται k φορές το χρόνο, τότε ύστερα από t έτη θα εισπράξουμε συνολικά το ποσό $\alpha_{k(t(}=(1+\frac{\tau}{k})^{kt}$.

Οι παραπάνω περιπτώσεις ανατοκισμού μας οδηγούν στα εξής προβλήματα:

Πρόβλημα 1

Μας συμφέρει το κεφάλαιο που καταθέσαμε στην τράπεζά μας για ένα χρόνο να ανατοκίζεται συχνότερα;

Απάντηση

Αν με A_ν συμβολίζουμε το ποσό που θα εισπράξουμε ύστερα από ένα χρόνο με ν ανατοκισμούς κατ' έτος ενός ποσού Κ και ετήσιο επιτόκιο τ, τότε θα είναι $A_\nu = K\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$. Επειδή η ακολουθία με γενικό όρο $\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα (*), τότε για $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, με $\nu<\mu$, ισχύει

$$A_\nu = K\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu < K\left(1 + \frac{\tau}{\mu}\right)^\mu = A_\mu$$

που σημαίνει ότι μας συμφέρει ο συχνότερος ανατοκισμός.

Σημείωση: Προφανώς, όταν πρόκειται για χρέος μας προς την τράπεζα ο συχνός ανατοκισμός του χρέους μας δε συμφέρει [Σχετίζεται με τα 'πανωτόκια'].

Πρόβλημα 2

Όπως είδαμε, όσο πιο συχνά ανατοκίζεται το ποσό μας ολοένα μεγαλύτερο θα είναι το τελικό μας ποσό. Θα μπορούσαμε να αυξήσουμε απεριόριστα το ποσό μας αν αυξάνουμε τη συχνότητα (μέσα σ' ένα έτος) του ανατοκισμού απεριόριστα;

Απάντηση

Στην πραγματικότητα ζητάμε να προσδιορίσουμε το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu t = \alpha\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu t}$, όταν το ν (ο αριθμός των ανατοκισμών μέσα στο έτος) αυξάνει απεριόριστα. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha(t) := \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu(t) = \alpha \lim_{\nu\to\infty} \left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu\cdot t} =$$

$$= \alpha \lim_{\nu\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\tau}}\right)^{\frac{\nu}{\tau}}\right]^{\tau\cdot t} = \alpha\left[\lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\tau}}\right)^{\frac{\nu}{\tau}}\right]^{\tau\cdot t} = \alpha e^{\tau\cdot t},$$

που σημαίνει ότι το τελικό μας ποσό σε t έτη δε μπορεί να αυξάνει απεριόριστα, αλλά περιορίζεται (φράσσεται) από τη συνάρτηση $\alpha e^{\tau\cdot t}$.

Φθάσαμε έτσι στον τύπο του συνεχούς ανατοκισμού, έναν σπουδαίο και ευρέως χρησιμοποιούμενο τύπο στις επιχειρήσεις, στις τράπεζες και στην οικονομία.

Τύπος του συνεχούς ανατοκισμού: Αν το κεφάλαιο α κατατεθεί με ετήσιο επιτόκιο ε%=τ και ανατοκίζεται συνεχώς, τότε το ποσό α(t) που θα προκύψει σε t έτη δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha(t) = \alpha e^{\tau\cdot t}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του α(t) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\alpha'(t) = \alpha e^{\tau t}\cdot\tau$, δηλαδή $\alpha'(t) = \tau\alpha(t)$, που σημαίνει ότι: **Όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε ο ρυθμός μεταβολής του ποσού είναι ανάλογος του υπάρχοντος ποσού.**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν κατατεθεί στην τράπεζα ποσό 1.000.000 δρχ. με ετήριο επιτόκιο 10%, τότε σε πέντε χρόνια θα εισπράξουμε:

- με **εξαμηνιαίο** ανατοκισμό το ποσό:

  $$1.000.000\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 5} = 1.628.894{,}6 \text{ δρχ.}$$

- με **ημερήσιο** ανατοκισμό το ποσό:

  $$1.000.000\left(1 + \frac{0{,}1}{365}\right)^{365\cdot 5} = 1.648.606{,}5 \text{ δρχ.}$$

- με **συνεχή** ανατοκισμό το ποσό:

  $1.000.000\cdot e^{0{,}1\cdot 5} = 1.648.721{,}3$ δρχ.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μικρή διαφορά στα τελικά ποσά μεταξύ ημερήσιου και συνεχούς ανατοκισμού. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού για μεγάλες τιμές του ν ισχύει:

$$\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu \approx e^\tau.$$

(*) Είναι γνωστό ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στον αριθμό Euler e (βλ. Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί Νο 5). Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_\nu = \left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$, με $\tau>0$, είναι αύξουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\nu>1$ ισχύει $\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} > 1$. Πράγματι, ισχύουν:

$$\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} = \left(1 + \frac{x}{\nu-1}\right)\left(\frac{1 + \frac{\tau}{\nu}}{1 + \frac{\tau}{\nu-1}}\right)^\nu = \frac{\nu+\tau-1}{\nu-1}\left(1 - \frac{\tau}{\nu(\nu+\tau-1)}\right)^\nu \text{ [ανισότητα Bernoulli] } > \frac{\nu+\tau-1}{\nu-1}\left(\frac{1-\nu\tau}{\nu(\nu+\tau-1}\right) = 1$$