

3ο Κεφάλαιο

Μάθημα
5

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί που συνδέονται με τις οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου**

Έστω $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β, γ .

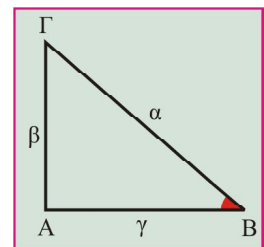
Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu B = \frac{\text{μήκος απέναντι πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

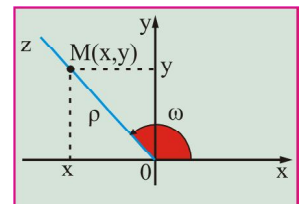
$$\sigma\phi B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης}} = \frac{\gamma}{\beta}$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0 \leq \omega \leq 360$.

Έστω ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox όταν περιστραφεί αριστερόστροφα (δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού).

Η ημιευθεία Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω και η ημιευθεία Oz **τελική πλευρά** αυτής.



Για την γωνία ω ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (x \neq 0), \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (y \neq 0)$$

όπου $M(x, y)$ οποιοδήποτε σημείο της τελικής πλευράς διαφορετικό από το σημείο O και

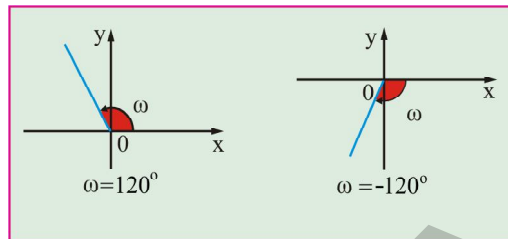
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

114.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

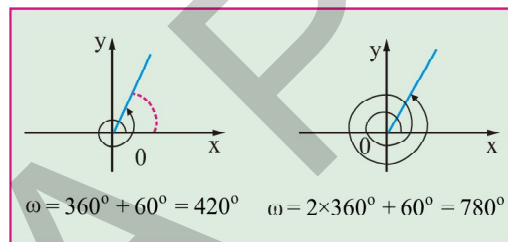
• Γωνίες μεγαλύτερες των 360° – “Αρνητικές γωνίες”

Αν φανταστούμε ότι ο ημιάξονας Ox περιστραφεί αριστερόστροφα (θετική φορά) κατά 120° λέμε ότι έχει διαγράψει θετική γωνία 120° . Αν περιστραφεί δεξιόστροφα κατά γωνία 120° , λέμε ότι έχει διαγράψει αρνητική γωνία 120° δηλαδή γωνία: -120°



Αν ο ημιάξονας Ox περιστραφεί αριστερόστροφα και αφού συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή (360°) διαγράψει επιπλέον γωνία 60° , τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$$



Αν συμπληρώσει δύο πλήρεις περιστροφές και επιπλέον γωνία 60° λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$\omega = 2 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 780^\circ$$

Γενικότερα, αν ο ημιάξονας Ox συμπληρώσει k πλήρεις περιστροφές κινούμενος αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα και επιπλέον διαγράψει γωνία ω τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$k \cdot 360^\circ + \omega, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

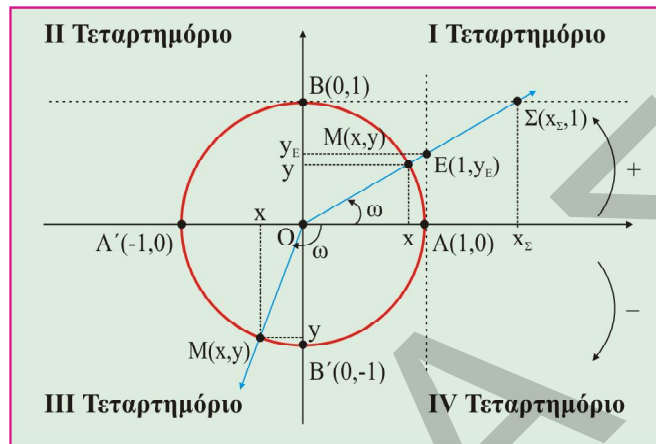
(αν $k > 0$ έχει διαγράψει θετική γωνία, αν $k < 0$ έχει διαγράψει αρνητική γωνία)

Οι γωνίες που δίνονται από τον τύπο (1) έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αφού όλες έχουν την ίδια τελική πλευρά δηλαδή:

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega \quad \sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

• Τριγωνομετρικός κύκλος



Ο κύκλος με κέντρο την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$, λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε:

$$\sin \omega = y \text{ και } \cos \omega = x$$

Φανερό είναι ότι:

$$-1 \leq \sin \omega \leq 1 \text{ και } -1 \leq \cos \omega \leq 1$$

αφού πάντα οι προβολές του M θα ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$. Επίσης τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω φαίνονται στον επόμενο πίνακα και είναι ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω .

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω

	Τεταρτημόρια			
	I	II	III	IV
$\sin \omega$	+	+	-	-
$\cos \omega$	+	-	-	+
$\tan \omega$	+	-	+	-
$\cot \omega$	+	-	+	-

116.

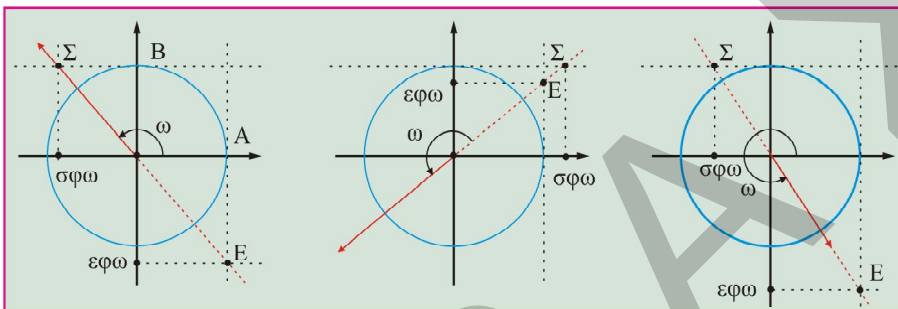
Τριγωνομετρικοί αριθμοί

• Άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων

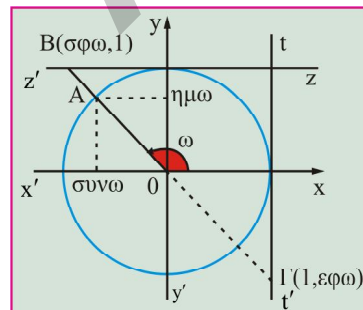
Στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας, που φαίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $A(1,0)$ και την εφαπτομένη στο σημείο $B(0,1)$. Η εφαπτομένη στο A λέγεται ευθεία των εφαπτομένων και η εφαπτομένη στο B λέγεται ευθεία των συνεφαπτομένων.

Είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = y_{\Sigma} \text{ και } \sigma\varphi\omega = x_{\Sigma}$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω με τελική πλευρά στο 2° τεταρτημόριο.



• Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Γνωρίζουμε το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και συγκεκριμένα:

Αν ένα κυκλικό τόξο έχει μήκος ίσο με το μήκος της ακτίνας του κύκλου που ανήκει, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως τόξο ενός ακτινίου (1 rad).

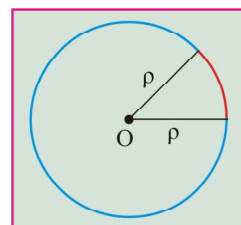
Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ ισούται με $2\pi\rho$ (όπου $\pi \approx 3,14$) είναι φανερό ότι κάθε κύκλος μπορεί να χαρακτηρίζεται και ως κυκλικό τόξο 2π ακτινίων (2π rad)

Φανερό είναι επίσης ότι κάθε ημικύκλιο μπορεί να δηλωθεί και ως τόξο π ($\approx 3,14$) ακτινίων και κάθε τεταρτημόριο (κύκλου), ως τόξο

$$\frac{\pi}{2} (\approx 1,57) \text{ ακτινίων.}$$

Προσδιορίζουμε την τιμή (έκφραση) ενός τόξου μ° (μοιρών) σε ακτίνια από τον τύπο:

$$\alpha = \frac{\mu^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$



αφού ο αριθμός $\frac{\pi}{180}$ δηλώνει το μέρος της ακτίνας που καλύπτει τόξο μιας μοίρας,

δηλαδή κάθε κυκλικό τόξο ίσο προς το $\frac{1}{360}$ του κύκλου που ανήκει.

Ορίζουμε το ακτίνιο (1 rad) ως τη γωνία που όταν γίνει επίκεντρη ενός κύκλου (O,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού.

π.χ. 360° αντιστοιχούν σε 2π rad

1° αντιστοιχεί σε $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ rad

1 rad αντιστοιχεί σε $\frac{360}{2\pi}$ μοίρες

α rad αντιστοιχεί σε $\alpha \frac{360}{2\pi} = \alpha \frac{180}{\pi}$ μοίρες

μ° αντιστοιχούν σε $\frac{\pi}{180} \mu$ rad

• Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών

ω (μοίρες)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ω (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\sigma\phi\omega$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

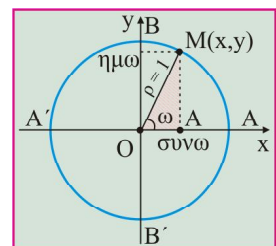
• Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM παίρνουμε:

$$(AM)^2 + (OA)^2 = (OM)^2 \text{ δηλαδή } (\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$

Συνηθως γράφουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad (1)$$



118.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

2. Είναι : $\text{εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\text{σφ}\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ (2)

εφόσον $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\eta\mu\omega \neq 0$ αντίστοιχα.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε: $\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$ (3)

3. Από την ταυτότητα (1), αν $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \text{εφ}^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega} \quad (4)$$

Ομοίως, αν διαιρέσουμε την (1) με $\eta\mu\omega \neq 0$, παίρνουμε: $\eta\mu^2\omega = \frac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$ (5)

Συγκεντρώσαμε τις παραπάνω ταυτότητες στον επόμενο πίνακα:

Ταυτότητα	Με την προϋπόθεση
$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\omega \in \mathbb{R}$
$\text{εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\text{σφ}\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \eta\mu\omega \neq 0$
$\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$	$\omega \in \mathbb{R}, \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\eta\mu^2\omega = \frac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

Παρατηρήσεις

- Οι αριθμοί $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\text{εφ}\omega$ και $\text{σφ}\omega$ (όταν υπάρχουν) καλούνται (βασικοί) **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του τόξου ω ή της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας ω .
- Ο τύπος (1) ισχύει, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, και όταν το πέρας M του τόξου ταυτίζεται με ένα από τα σημεία $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$, $B'(0,-1)$, όταν δηλαδή

$$\omega = 2\kappa\pi \text{ ή } 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 2\kappa\pi + \pi \text{ ή } 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

3. Για κάθε τόξο με πέρας τα σημεία $B(0,1)$ ή $B'(0,-1)$ (ή κάθε γωνία με τελική πλευρά του ημιάξονα Oy ή Oy' αντίστοιχα) **δεν ορίζεται εφαπτομένη**, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν συνημίτονο ίσο με μηδέν.

Άρα, τα τόξα με προσημασμένα μέτρα: $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ δεν έχουν εφαπτομένη.

Κάθε τόξο με πέρας το σημείο $A(1,0)$ ή $A'(-1,0)$ δεν έχει συνεφαπτομένη, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν ημίτονο ίσο με μηδέν.

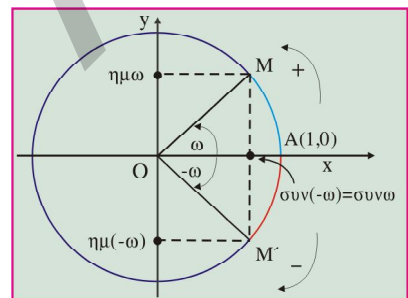
Οπότε, τα τόξα με “προσημασμένα μέτρα”: $\omega = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ δεν έχουν συνεφαπτομένη.

• Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

1. Αντίθετα τόξα (αντίθετες γωνίες)

Δύο αντίθετα τόξα ω και $-\omega$ με κοινή αρχή το $A(1,0)$ (ή αντίθετες γωνίες με κοινή αρχική πλευρά την OA) έχουν προφανώς περατα M και M' (τελικές πλευρές) συμμετρικά (συμμετρικές) ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε:

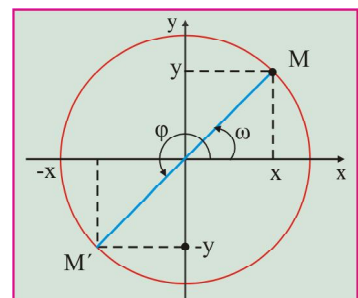
$$\begin{aligned}\eta\mu(-\omega) &= -\eta\mu\omega, & \sigma\upsilon\nu(-\omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega, \\ \epsilon\phi(-\omega) &= -\epsilon\phi\omega, & \sigma\phi(-\omega) &= -\sigma\phi\omega\end{aligned}$$



2. Τόξα (γωνίες) με διαφορά 180° ή π

Είναι $\varphi = \pi + \omega$ τότε:

$$\begin{aligned}\eta\mu\varphi &= \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi\varphi &= \epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi\varphi &= \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega\end{aligned}$$



120.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

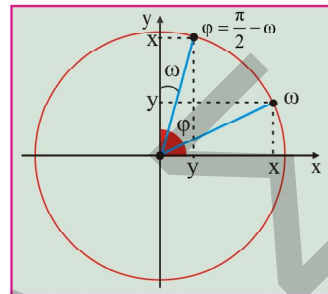
3. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα (διαφορά) 90° ή $\frac{\pi}{2}$

Αν $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$, τότε: $\eta\mu\varphi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\omega$$

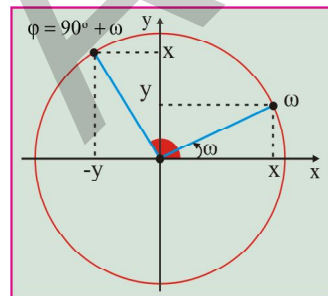


Αν $\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega$, τότε: $\eta\mu\varphi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$$



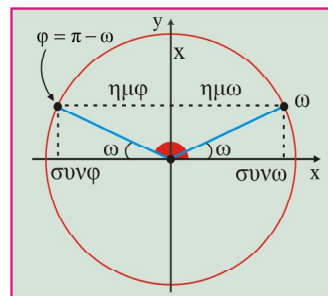
4. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα 180° ή π

Είναι $\varphi = \pi - \omega$, τότε: $\eta\mu\varphi = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi(\pi - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$



	$-x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{3\pi}{2} - x$	$\frac{3\pi}{2} + x$	$2\pi - x$	$2\pi + x$
		$90 - x$	$90 + x$	$180 - x$	$180 + x$	$270 - x$	$270 + x$	$360 - x$	$360 + x$
$\eta\mu$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$
$\epsilon\varphi$	$-\epsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$\epsilon\varphi x$
$\sigma\varphi$	$-\sigma\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$

Παράδειγμα

Να εκφράσετε τα $\eta\mu\phi$, $\sigma\upsilon\nu\phi$ συναρτήσει των $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $\phi + \omega = 2\pi$ ii. $\phi + \omega = \frac{3\pi}{2}$ iii. $\phi - \omega = \frac{3\pi}{2}$

Λύση

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

i. $\eta\mu\phi = \eta\mu(2\pi - \omega) = \eta\mu(2\pi + (-\omega)) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + (-\omega)) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

ii. $\eta\mu\phi = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\eta\mu\omega$

iii. $\eta\mu\phi = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Σε ασκήσεις μετατροπής μοιρών σε rad και αντίστροφα χρησιμοποιούμε:

α. τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ β. $\pi \text{ rad} = 3,14 \text{ rad}$ αντιστοιχούν σε 180°

Παράδειγμα 1

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία 10 rad

Λύση

Ισχύει: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{10}{3,14} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 3,14 \cdot \mu = 10 \cdot 180 \Leftrightarrow \mu = \frac{1800}{3,14} \approx 573^\circ$

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία $\frac{3\pi}{20} \text{ rad}$.

Λύση

Επειδή $\pi(\text{rad})$ αντιστοιχούν σε 180° έχουμε $\frac{3\pi}{20} \text{ rad}$ αντιστοιχούν σε $\frac{3 \cdot 180^\circ}{20} = 27^\circ$.

122.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Παράδειγμα 3**Να μετατρέψετε τη γωνία τις 390° σε rad.****Λύση:**

$$\text{Ισχύει: } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{390}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6\alpha = 13\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{13\pi}{6} \text{ rad} = \frac{13 \cdot 3,14}{6} \text{ rad} = 6,8 \text{ rad}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Σε ασκήσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, έστω α , θα ελέγχουμε:

1. Αν $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ και θα χρησιμοποιούμε τους τύπους της αναγωγής στο 1° τεταρτημόριο
2. Αν $\alpha > 360^\circ$ και θα διαιρούμε το α με το 360 φέρνοντας το α στην μορφή $\alpha = 360\kappa + \omega$ ή $\alpha = 2\pi \cdot \kappa + \omega$.

Παράδειγμα 4**Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:****α.** $\eta\mu 120^\circ$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 210^\circ$ **γ.** $\epsilon\phi 330^\circ$ **δ.** $\sigma\upsilon\nu 330^\circ$ **ε.** $\eta\mu(-300^\circ)$ **στ.** $\sigma\upsilon\nu 3540^\circ$ **ζ.** $\sigma\phi(-4440)$ **η.** $\eta\mu 2001\pi$ **θ.** $\epsilon\phi 2002\pi$ **Λύση**

$$\text{α. είναι } \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(90^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{β. είναι } \sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{γ. είναι } \epsilon\phi 330^\circ = \epsilon\phi(270^\circ + 60^\circ) = -\sigma\phi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{δ. είναι } \sigma\upsilon\nu 330^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ε. είναι } \eta\mu(-300^\circ) = -\eta\mu 300^\circ = -\eta\mu(270^\circ + 30^\circ) = -(-\sigma\upsilon\nu 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{στ. Απ' την διαίρεση } 3540:360 \text{ έχουμε: } 3540 = 360 \cdot 9 + 300$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu 3540^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ \cdot 9 + 300^\circ) = \sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu(270^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ζ. Απ' την διαίρεση } 4440:360 \text{ έχουμε: } 4440 = 360 \cdot 12 + 120$$

$$\text{Άρα } \sigma\phi(-4440^\circ) = -\sigma\phi 4440^\circ = -\sigma\phi(360^\circ \cdot 12 + 120^\circ)$$

$$= -\sigma\phi 120^\circ = -\sigma\phi(90^\circ + 30^\circ) = -(-\epsilon\phi 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta. \eta\mu 2001\pi = \eta\mu(2000\pi + \pi) = \eta\mu(1000 \cdot 2\pi + \pi) = \eta\mu\pi = 0$$

$$\theta. \epsilon\phi 2002\pi = \epsilon\phi(1001 \cdot 2\pi) = \epsilon\phi 0 = 0$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουμε τον πίνακα της σελ 20 αρκεί να γνωρίζουμε ότι:

- Αν η γωνία x είναι της μορφής $(2k+1)\pi \pm \alpha$ ή $2k\pi \pm \alpha$ ή $-\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε ο τριγωνομετρικός αριθμός παραμένει ο ίδιος με πρόσημο $+$ ή $-$ ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας (θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$$\text{π.χ. } \eta\mu(3\pi - \alpha) = \eta\mu(\pi - \alpha) = \eta\mu\alpha$$

- Αν η γωνία x είναι της μορφής $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε καταλήγουμε σε μορφή:

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ή $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ κάνοντας την διαίρεση $(2k+1):2$ και ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει από $\eta\mu$ σε $\sigma\upsilon\nu$, από $\epsilon\phi$ σε $\sigma\phi$ και αντίστροφα. Το πρόσημο που θέτουμε εξαρτάται πάλι από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

$$\text{π.χ. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\theta$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2} + \theta\right) \quad \text{ii. } \epsilon\phi\left(\frac{45\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{iii. } \eta\mu(2003\pi + \theta)$$

Λύση

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(60\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\theta$$

$$\text{ii. } \epsilon\phi\left(\frac{45\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\left(22\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\phi\theta$$

$$\text{iii. } \eta\mu(2003\pi + \theta) = \eta\mu(2002\pi + \pi + \theta) = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$$

124.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν μας δίνεται ο τριγωνομετρικός αριθμός μιας γωνίας και ζητείται να υπολογίσουμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χρησιμοποιούμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες λαμβάνοντας υπόψιν το διάστημα μεταβολής της γωνίας.

Παράδειγμα 6

Δίνεται ότι: $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (1) και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ (2)

Να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x .

Λύση

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$.

Αντικαθιστούμε το $\eta\mu x$ με $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Επειδή $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu x < 0$ και συνεπώς:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$$

Από τις ταυτότητες $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ έχουμε:

$$\bullet \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Δηλαδή } \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Δηλαδή } \sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(\text{ή αλλιώς: } \sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5})$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα εργαζόμαστε με τους εξής τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Αρχίζουμε από το πιο σύνθετο μέλος και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες και πράξεις προσπαθούμε να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

2^{ος} τρόπος

Ξεκινάμε και από τα δύο μέλη συγχρόνως και κάνοντας πράξεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες προσπαθούμε με ισοδυναμίες να καταλήξουμε σε μία σχέση που ισχύει.

Παράδειγμα 7

Ν' αποδείξετε ότι: **α.** $\frac{\varepsilon\phi x - \sigma\phi y}{\varepsilon\phi x + \sigma\phi y} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$ **β.** $\frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$

Λύση

α. Από το 1^ο μέλος (το πιο σύνθετο) θα φθάσουμε στο 2^ο μέλος.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{\varepsilon\phi x - \sigma\phi y}{\varepsilon\phi x + \sigma\phi y} &= \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}}{\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1} = \\ &= \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x \end{aligned}$$

β. Κάνουμε πράξεις στα δύο μέλη συγχρόνως:

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } \frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} \Leftrightarrow (1 + \eta\mu\alpha)(1 - \eta\mu\alpha) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 1 = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται ν' αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση είναι σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη από το τόξο που υπάρχει στην παράσταση) χρησιμοποιούμε γνωστές ταυτότητες όπως: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$,

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, καθώς και γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Επίσης μπορούμε, αν στην παράσταση μετέχουν $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$, να θέσουμε $\eta\mu^2 x = \alpha$ οπότε $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \alpha$ και προσπαθούμε ν' αποδείξουμε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του α .

126.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Παράδειγμα 8

Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση $A = 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) - 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x)$ είναι ανεξάρτητη του x (ή σταθερή).

Λύση*1^{ος} τρόπος*

$$\begin{aligned} A &= 3[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x] \\ &\quad - 2[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)] = \\ &= 3(1^2 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) - 2(1^3 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) = 3 - 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x - 2 + 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1. \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Θέτουμε $\eta\mu^2 x = \alpha$ οπότε: $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - \alpha$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3[\alpha^2 + (1 - \alpha)^2] - 2[\alpha^3 + (1 - \alpha)^3] = 3(\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2) - 2(\alpha^3 + 1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= 3(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 2(1 - 3\alpha + 3\alpha^2) = 6\alpha^2 - 6\alpha + 3 - 2 + 6\alpha - 6\alpha^2 = 1 \end{aligned}$$

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα επόμενα:

α. $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

β. $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = \eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha$

γ. $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega$

δ. $\eta\mu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$

Λύση

α. Λ (διότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$)

β. Σ (διότι $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$ και $\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1$)

γ. Σ (διότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega$)

δ. Λ (διότι $\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$)

Άσκηση 2

Να επιλέξετε το σωστό στα παρακάτω:

α. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$ είναι ίσο με: 1. $\eta\mu\omega$, 2. $-\sigma\upsilon\nu\omega$, 3. $\sigma\upsilon\nu\omega$

β. $\epsilon\varphi(\pi - \omega)$ είναι ίση με: 1. $\epsilon\varphi\omega$, 2. $-\epsilon\varphi\omega$, 3. $-\sigma\varphi\omega$

γ. $\sigma\upsilon\nu(2001\pi - \omega)$ είναι ίσο με: 1. $-\sigma\upsilon\nu\omega$, 2. $\sigma\upsilon\nu\omega$, 3. $-\eta\mu\omega$

Λύση

α. 3 β. 2 γ. 1

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε την παράσταση: $K = \frac{\epsilon\varphi 420^\circ - \eta\mu 510^\circ - \eta\mu(-750^\circ)}{\eta\mu^2 100^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 80^\circ + 2\epsilon\varphi 160^\circ \cdot \sigma\varphi 20^\circ}$

Λύση

Είναι $\epsilon\varphi 420^\circ = \epsilon\varphi(360^\circ + 60^\circ) = \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\eta\mu 510^\circ = \eta\mu(360^\circ + 150^\circ) = \eta\mu 150^\circ = \eta\mu(90^\circ + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu(-750^\circ) = -\eta\mu 750^\circ = -\eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu^2 100^\circ = \eta\mu^2(180^\circ - 80^\circ) = \eta\mu^2 80^\circ$$

$$\epsilon\varphi 160^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 20^\circ) = -\epsilon\varphi 20^\circ$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } K = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\eta\mu^2 80^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 80^\circ + 2(-\epsilon\varphi 20^\circ) \cdot \sigma\varphi 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1 - 2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

Άσκηση 4

Ν'απλοποιήσετε την παράσταση $\Pi = \frac{\eta\mu \frac{13\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 3\epsilon\varphi \frac{23\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu \frac{19\pi}{3}}$

Λύση

Ισχύει $\eta\mu \frac{13\pi}{6} = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

128.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

$$\text{Επίσης } \varepsilon\varphi \frac{23\pi}{4} = \varepsilon\varphi \left(6\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Είναι } \sigma\upsilon\nu \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \eta\mu \frac{19\pi}{3} = \eta\mu \left(6\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι η παράσταση Π γίνεται: } \Pi &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = -\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 5**Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση**

$$K = \frac{\sigma\varphi \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \eta\mu \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}{\eta\mu (2\pi - \alpha)} - \eta\mu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu (\pi - \alpha) + \eta\mu (\pi + \alpha) + \sigma\upsilon\nu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

είναι ανεξάρτητη του α.**Λύση**

$$\sigma\varphi \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \varepsilon\varphi \alpha,$$

$$\eta\mu \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\eta\mu (2\pi - \alpha) = -\eta\mu \alpha,$$

$$\eta\mu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \eta\mu \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = -\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu (\pi - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\eta\mu (\pi + \alpha) = -\eta\mu \alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sigma\upsilon\nu \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \eta\mu \alpha.$$

$$\text{Έτσι η παράσταση K γίνεται: } K = \frac{\varepsilon\varphi \alpha (-\sigma\upsilon\nu \alpha)}{-\eta\mu \alpha} - (-\sigma\upsilon\nu \alpha) + (-\sigma\upsilon\nu \alpha) + (-\eta\mu \alpha) + \eta\mu \alpha$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} \cdot \sigma\upsilon\nu \alpha \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha} + \sigma\upsilon\nu \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu \alpha + \eta\mu \alpha = 1 \text{ (ανεξάρτητη του } \alpha) \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Ν' αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$.

Λύση

Είναι $\eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x =$

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x &= \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \\ &= \frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \\ \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} &= \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \epsilon\phi x + \sigma\phi x \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Αν $\sigma\phi x = \sqrt{3}$ **και** $x \in (180^\circ, 270^\circ)$ **να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

Λύση

Αφού $x \in (180^\circ, 270^\circ)$ η τελική πλευρά της γωνίας x είναι στο III τεταρτημόριο.

Άρα $\begin{cases} \eta\mu x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x < 0 \end{cases}$ (1). Τότε: $\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Δηλαδή $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

και λόγω της (1) έχουμε $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Είναι $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$. Δηλαδή $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

Άσκηση 8

1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ν' αποδείξετε ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu B = -\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)$

β. $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$

2. Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ν' αποδείξετε ότι:

α. $\eta\mu(A + \Gamma) = -\eta\mu(B + \Delta)$

β. $\sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + \Delta}{2} = 0$

130.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

$$\gamma. \text{ συν } \frac{A+B}{4} - \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} = 0$$

Λύση

$$1 \alpha. \text{ Ισχύει, } A+B+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow B=180^\circ-(A+\Gamma)$$

$$\text{Άρα } \text{συν} B = \text{συν} [180^\circ - (A+\Gamma)] = -\text{συν}(A+\Gamma)$$

$$\beta. \text{ Είναι } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 90^\circ - \left(\frac{B+\Gamma}{2} \right).$$

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \left[90^\circ - \left(\frac{B+\Gamma}{2} \right) \right] = \sigma\varphi \frac{B+\Gamma}{2}$$

$$2 \alpha. \text{ Είναι } A+B+\Gamma+\Delta=360^\circ \Leftrightarrow A+\Gamma=360^\circ-(B+\Delta)$$

$$\text{Άρα } \eta\mu(A+\Gamma) = \eta\mu [360^\circ - (B+\Delta)] = -\eta\mu(B+\Delta)$$

$$\beta. \text{ Ισχύει, } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Delta}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = 180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

$$\text{Άρα } \text{συν} \frac{A+B}{2} = \text{συν} \left[180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\text{συν} \frac{A+B}{2} = -\text{συν} \frac{\Gamma+\Delta}{2} \Leftrightarrow \text{συν} \frac{A+B}{2} + \text{συν} \frac{\Gamma+\Delta}{2} = 0$$

$$\gamma. \text{ Είναι } \frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{\Gamma}{4} + \frac{\Delta}{4} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{4} = 90^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{4}$$

$$\text{Άρα } \text{συν} \frac{A+B}{4} = \text{συν} \left[90^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{4} \right] \Leftrightarrow$$

$$\text{συν} \frac{A+B}{4} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} \Leftrightarrow \text{συν} \frac{A+B}{4} - \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} = 0$$

Άσκηση 9

$$\text{Να αποδειχθεί η ισότητα: } 6\varepsilon\varphi(\pi+x) + 3\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2} - x\right) - 43\varepsilon\varphi(21\pi - x) = 52\varepsilon\varphi x$$

Λύση

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi(\pi+x) = \varepsilon\varphi x.$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(21\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$$

$$\varepsilon\varphi(21\pi - x) = \varepsilon\varphi(20\pi + \pi - x) = \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\text{Οπότε: } 6\varepsilon\varphi x + 3\varepsilon\varphi x - 43(-\varepsilon\varphi x) = 52\varepsilon\varphi x$$

Άσκηση 10

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι: $\text{συν}^2 \frac{A}{2} + \text{συν}^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$

Λύση

$$\text{Επειδή } A+B+\Gamma = \pi \text{ είναι } \frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \text{ οπότε } \text{συν}\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \eta\mu \frac{A}{2}.$$

$$\text{Τότε: } \text{συν}^2 \frac{A}{2} + \text{συν}^2 \frac{B+\Gamma}{2} = \text{συν}^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{A}{2} = 1.$$

Άσκηση 11

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ$.

Λύση

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi 95^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 5^\circ) = -\sigma\varphi 5^\circ \text{ και } \varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 7^\circ) = -\sigma\varphi 7^\circ$$

$$\text{Οπότε: } A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi 5^\circ (-\sigma\varphi 5^\circ) \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ (-\sigma\varphi 7^\circ) = (-1)(-1) = 1$$

Άσκηση 12

Να αποδειχθεί ότι: $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

Λύση

$$\text{Είναι } \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x, \varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x, \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\eta\mu x$$

$$\text{Οπότε: } \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \varepsilon\varphi x \geq 4 + 5\sigma\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\eta\mu x} \geq 4 - 5\sigma\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \geq 4\sigma\eta\mu x - 5\sigma\eta\mu^2 x$$

$$(\text{η φορά της ανίσωσης παρέμεινε διότι } \sigma\eta\mu x > 0 \text{ όταν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

$$5\sigma\eta\mu^2 x + 1 - \sigma\eta\mu^2 x - 4\sigma\eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\eta\mu^2 x - 4\sigma\eta\mu x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\sigma\eta\mu x - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

132.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Α.

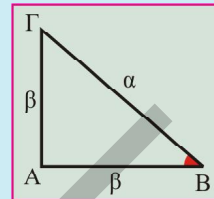
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές β cm . Να υπολογίσετε:

α. Την υποτείνουσά του

β. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45° και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

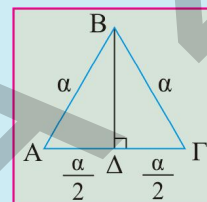
ημ 45°	συν 45°	εφ 45°	σφ 45°



2. Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε τις γωνίες: α. 60° και β. 30° .

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° και 60° και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Γωνία α	30°	60°
ημ α		
συν α		
εφ α		
σφ α		



3. Να μετατρέψετε τις μοίρες σε rad και αντίστροφα.

α. 3690°

β. $\frac{10\pi}{3}$ rad

γ. 15 rad

4. Να υπολογίσετε:

α. ημ 3090°

β. συν (-2640°)

γ. εφ $\left(-\frac{185\pi}{6}\right)$

δ. σφ $\frac{85\pi}{4}$

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$):

α. Δίνεται συνB = 0,6 . Υπολογίστε: i. ημB, ii. εφB

β. Δίνεται ημB = $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Υπολογίστε: i. συνB, ii. εφB

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) στο οποίο $B\Gamma = 26$ cm και $\widehat{AB\Gamma} = 47^\circ$. Υπολογίστε:

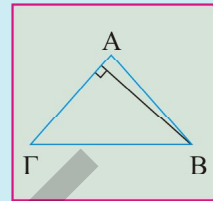
α. Την πλευρά AB,

β. Το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά AG.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) όπου $\hat{A} = 84^\circ$ και $AB = 50 \text{ cm}$. Υπολογίστε:

α. Την πλευρά AB ,

β. το ύψος AH .



8. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ .

	τεταρτημόριο τελικής πλευράς
$\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\epsilon\phi\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\sigma\phi\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\epsilon\phi\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\eta\mu\theta > 0$ και $\epsilon\phi\theta > 0$	
$\sigma\phi\theta > 0$ και $\eta\mu\theta < 0$	
$\eta\mu\theta < 0$ και $\epsilon\phi\theta < 0$	
$\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	

9. Αν $0 < x < 90^\circ$ βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) + \sigma\phi(90^\circ - x) - \eta\mu(270^\circ - x)$$

10. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{2}$

11. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α)-(στ) απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα **ι.** έως και **iv.**

α. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	β. $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	γ. $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
δ. $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	ε. $\eta\mu\omega = \pm \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	στ. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

- ι. α.** $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,4$ όπου $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Υπολογίστε το $\eta\mu\theta$ και την $\epsilon\phi\theta$.

- β.** $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ όπου $180^\circ < \theta < 270^\circ$. Υπολογίστε το $\eta\mu\theta$ και την $\epsilon\phi\theta$.

134.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

ii. Εάν $\eta\mu y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^\circ < y < 180^\circ$, υπολογίστε το συνy και την εφy.

iii. Εάν $\epsilon\phi\theta = \frac{8}{15}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

iv. Να βρείτε τη γωνία θ , αν γνωρίζετε ότι $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

12. Αν $2\epsilon\phi\theta - 3 = 0$ και $\eta\mu\theta < 0$, να βρεθεί το συνθ.

13. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες x, α, β ισχύουν:

α. $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β. $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu^2 x - 1$

γ. $(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 + \eta\mu x)$

δ. $\frac{1 - \epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

14. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α. $y = 2 + 3\sigma\upsilon\nu x$

β. $y = 5 + \eta\mu^2 x$

γ. $y = \frac{1}{2 - \eta\mu x}$

15. Αν $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$, τότε και $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$.

16. Αν $3\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta = 5$, τότε να δείξετε ότι: $(3\eta\mu\theta - 5\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 9$.

17. Να υπολογισθεί η παράσταση $\Pi = \frac{2\epsilon\phi 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 690^\circ + 2\epsilon\phi \frac{41\pi}{6}}{2\epsilon\phi 405^\circ - 4\eta\mu 570}$

18. Να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^2(41\pi + x)} + \frac{\eta\mu^2(x - \pi) + \sigma\upsilon\nu^2(21\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{81\pi}{2} - x\right)} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

19. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν δίνονται:

α. $\sin x = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

β. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$

γ. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$ και $\frac{83\pi}{2} < x < \frac{442\pi}{2}$

δ. $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $100\pi < x < \frac{201\pi}{2}$

20. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\sigma\phi^2 x - 1}{\sigma\phi^2 x + 1} = 2 \sin^2 x - 1$

β. $\sin^2 \alpha (1 + \epsilon\phi^2 \alpha) + \eta\mu^2 \alpha (1 + \sigma\phi^2 \alpha) = 2$

γ. $1 - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

δ. $\frac{\eta\mu x}{1 + \sin x} + \sigma\phi x = \frac{1}{\eta\mu x}$

21. Να εξετάσετε αν υπάρχει x για το οποίο:

α. να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = \frac{1}{5}$ και $\sin x = \frac{1}{5}$

β. να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu^4 x = \frac{1}{16}$ και $\sin^6 x = \frac{1}{64}$

22. Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \eta\mu^2(x - 180) + \sin 300 - \sin(180 - x) \sin(360 - x) + \\ + \eta\mu 1590^\circ + 8\eta\mu^2 y + 2\eta\mu^2(90 - y) + 6\sin^2 y \quad \text{είναι σταθερή.}$$

23. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(-x) \cdot \epsilon\phi(5\pi + x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\phi(2\pi - x)}{\sin(3\pi - x) \epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)}$$

$$B = \frac{\eta\mu(\pi - x) \cdot \sin(2\pi + x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(\pi + x)}$$

Ν' αποδείξετε ότι $A = B^3$.

136.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

24. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\frac{\eta\mu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(7\pi + \alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(4\pi + \alpha)\eta\mu\alpha}$

25. Να εκφράσετε συναρτήσει του $\sigma\upsilon\nu x$ και του $\eta\mu x$ την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(-x) + \eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

26. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 560^\circ \eta\mu 140^\circ - \eta\mu 680^\circ \sigma\upsilon\nu 380^\circ = 0$

27. Δίνεται ότι: $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

α. Να υπολογίσετε : i. $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ και ii. $\epsilon\phi \frac{\pi}{5}$

β. Από τα $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$, να υπολογισθούν:

i. $\eta\mu \frac{4\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{5}$, ii. $\eta\mu \frac{6\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{5}$.

28. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(x - y)\sigma\upsilon\nu(y - x) + \eta\mu(y - x)\sigma\upsilon\nu(x - y)$$

29. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ έχουμε:

α. $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ β. $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2(A + \Gamma) = 1$

30. Αποδείξτε ότι: $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

31. Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

α. $\epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β. $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^3 x$ γ. $\sqrt{1 - \eta\mu x} \cdot \sqrt{1 + \eta\mu x}$

32. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α. $\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x}$ β. $\frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y}$

33. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αποδείξτε ότι:

α. i. $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$ ii. $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$

$$\text{iii. } \eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \quad \text{iv. } \epsilon\phi \frac{A+B}{2} = \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$$

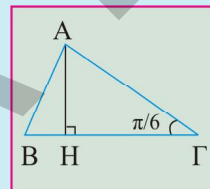
β. Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του α ερωτήματος, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$\text{i. } \eta\mu \frac{A}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{ii. } \epsilon\phi \frac{A}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{iii. } \eta\mu^2 \frac{A}{2} - \eta\mu^2 \frac{B+\Gamma}{2}$$

34. Ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma = \alpha$) η γωνία της κορυφής A έχει σε ακτίνια μέτρο

$$\theta. \text{ Αποδείξτε ότι η βάση } B\Gamma = 2\alpha\eta\mu \frac{\theta}{2}.$$

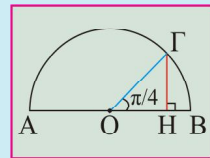
35. Στο διπλανό σχήμα είναι: $BH = 1 \text{ m}$ και $\Gamma H = 3 \text{ m}$. Ποια είναι η ακριβής τιμή της περιμέτρου του τριγώνου $AB\Gamma$;



36. Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = AB = O\Gamma = 1 \text{ m}$ και $BO\Gamma = \pi/4 \text{ rad}$.

α. Υπολογίστε την OH και την AH και στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}) = \frac{2+\sqrt{2}}{2A\Gamma} \quad (1)$$



β. Βρείτε το είδος του τριγώνου $A\Gamma B$ και στη συνέχεια δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}) = \frac{A\Gamma}{2}$ (2)

γ. Αποδείξτε ότι: **i.** $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ και **ii.** $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

37. Ν' αποδείξετε ότι $\sqrt{2\epsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = -1 + \epsilon\phi x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

38. Αν $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$ ν' αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

39. Αν $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ν' αποδείξετε ότι $\epsilon\phi x = \frac{3}{4}$

(**Υπ:** Λύνουμε ως προς $\eta\mu x$ και $\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$)

138.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

40. Αν $3\eta\mu x + 5 \sigma\upsilon\nu x = 5$ ν' αποδείξετε ότι $(3\sigma\upsilon\nu x - 5\eta\mu x)^2 = 9$

(Υπ: $(3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x)^2 = 5^2$ κ.τ.λ)

41. Αν $v \in \mathbb{N}^*$ ν' αποδείξετε ότι $(-1)^v \sigma\upsilon\nu x \left[(2v + 1) \frac{\pi}{2} - \alpha \right] = \eta\mu \alpha$