

Μάθημα
6

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις Τριγωνομετρικές εξισώσεις

1.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Περιοδική συνάρτηση

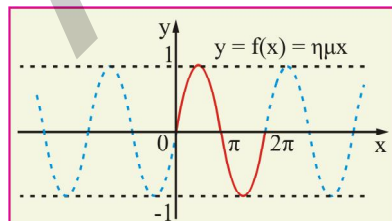
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν: **i.** $x + T \in A$, $x - T \in A$, **ii.** $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$
Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Η συνάρτηση ημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\eta\mu(x \text{ rad})$ λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$$

Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π



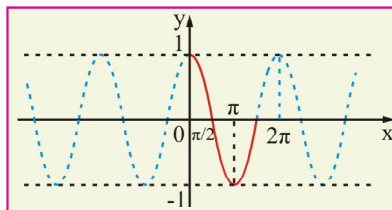
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0
		μέγιστο		ελάχιστο	

Η συνάρτηση συνημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$ λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π .



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1	0	-1	0	1
	μέγιστο		ελάχιστο		μέγιστο

140.

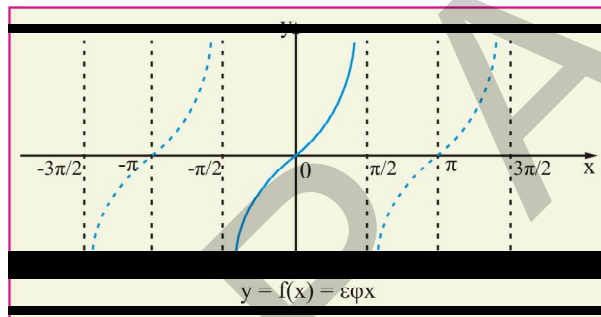
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Η συνάρτηση εφαπτομένη

Η συνάρτηση εφαπτομένη ορίζεται ως το πηλίκο του ημιτόνου προς το συνημίτονο.

Είναι: $f(x) = \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ με πεδίο ορισμού το $A = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$

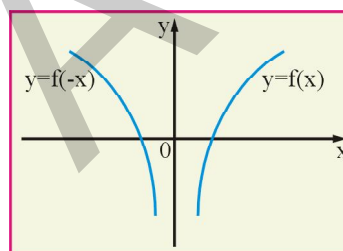
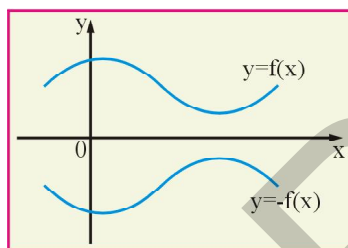
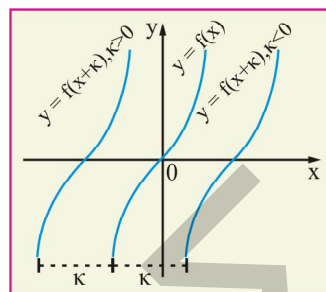
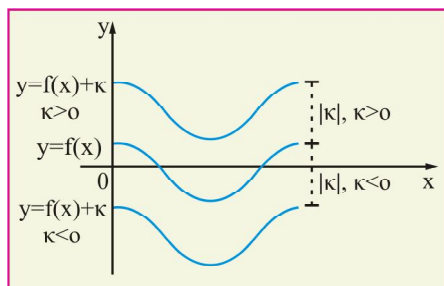
Η συνάρτηση $\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο π



Οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ και $g(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$

η μέγιστη τιμή της f είναι το ρ και η ελάχιστη τιμή της είναι το $-\rho$.

Το ω καθορίζει την **περίοδο T** της f που είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Ισότητα ημιτόνων

142.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Ισότητα συνημιτόνων

ΔΑΡΑΣ

Ισότητα εφαπτομένων - συνεφαπτομένων



144.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

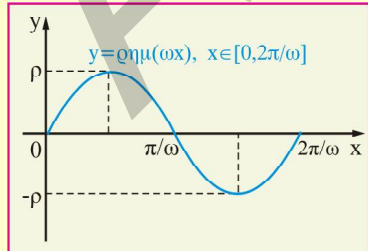
- **Τριγωνομετρική εξίσωση** με έναν άγνωστο λέγεται κάθε εξίσωση που ο άγνωστος ή η παράσταση του αγνώστου περιέχεται σε ένα τουλάχιστον τριγωνομετρικό αριθμό.

Παραδείγματα

1. Οι εξισώσεις $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $\epsilon\phi^3 x - 7\epsilon\phi x + 6 = 0$, είναι τριγωνομετρικές.
 2. Η εξίσωση $x + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 2$ δεν είναι τριγωνομετρική εξίσωση γιατί δεν περιέχει τον άγνωστο x σε τριγωνομετρικό αριθμό.
- **Λύση** μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι το σύνολο των γωνιών (ή τόξων) που την επαληθεύουν.
 - Η διαδικασία εύρεσης της λύσης λέγεται **επίλυση** της τριγωνομετρικής εξίσωσης.

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ και έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$.

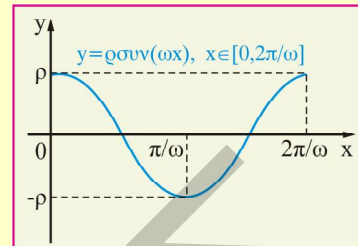
**Παράδειγμα 1**

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu(4x)$ και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Λύση

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \sin(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ και έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$.

**Παράδειγμα 2**

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$ σε πλάτος μιας περιόδου.

Λύση

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \sin(\omega x + \varphi)$ με $\rho, \omega > 0$ και $\varphi \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$f(x) = \rho \sin \left[\omega \left(x + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right].$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x) = \rho \sin(\omega x)$ αν

όπου x θέσουμε το $x + \frac{\varphi}{\omega}$. Επομένως:

- Είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$.
- Η γραφική παράσταση προκύπτει από κατάλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \rho \sin(\omega x)$.

146.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή και να παραστήσετε γραφικά τη

συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση**Κατηγορία – Μέθοδος 4**

Η επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης στηρίζεται στο μετασχηματισμό της σε κάποια από τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Αυτό το επιτυγχάνουμε με τη βοήθεια κατάλληλων τριγωνομετρικών τύπων όπως θα δούμε στα λυμένα παραδείγματα και στα σχόλια που ακολουθούν.

Με την εφαρμογή των τύπων των λύσεων των εξισώσεων, από μια βασική τριγωνομετρική εξίσωση, καταλήγουμε σε αλγεβρική εξίσωση που την επιλύουμε κατά τα γνωστά ως προς το άγνωστο τόξο.

ΔΑΡΑΣ

148.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

ΔΑΡΑΣ

ΔΑΡΑΣ

150.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Όταν ζητείται να λύσουμε τριγωνομετρική εξίσωση σε διάστημα (α, β) τότε:

Βρίσκουμε αρχικά τις άπειρες λύσεις της και στη συνέχεια από την ανισότητα $\alpha < x < \beta$

βρίσκουμε τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες οι λύσεις ανήκουν στο διάστημα (α, β) .

Παράδειγμα 9

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

Λύση

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

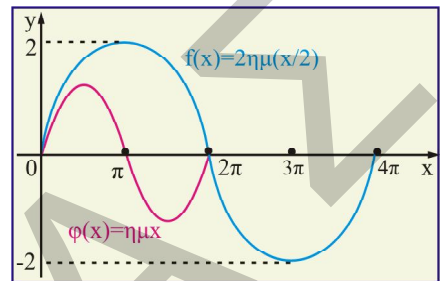
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη και έχει μέγιστη τιμή το 2, ελάχιστη τιμή το -2 και είναι περιοδική με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

Σχεδιάζουμε την ημιτονοειδή καμπύλη σε διάστημα πλάτους 4π . Για σύγκριση σχεδιάσαμε και τη συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



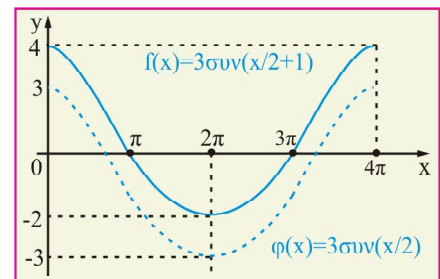
Άσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + 1$

Λύση

Η f είναι περιοδική περίοδο $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Σχεδιά-

ζουμε μια συνημιτονοειδή καμπύλη στο διάστημα $[0, 4\pi]$ με μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη το -3 και τη μεταφέρουμε προς τα πάνω κατά μία μονάδα.



Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Λύση

Επειδή $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

152.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{13\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Λύση

$$\text{Είναι } 2\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x + \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \eta\mu x + 1$ **στο διάστημα** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

$$\text{Πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu x + \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x + 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x - 1 = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 1 & (1) \\ \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{απορρίπτονται λόγω περιορισμών})$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ 0x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (αδύνατη)} \end{cases}$$

Προσδιορισμός του κ :

$$\text{Είναι } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \kappa < \frac{1}{4}$$

και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα είναι $\kappa = 0$.

Άρα από τις άπειρες λύσεις $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ μόνο μία λύση (αυτή που προκύπτει για $\kappa = 0$) ανήκει

στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και είναι η $x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Άσκηση 6

Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0$.

Λύση

Θέτουμε $t = \eta\mu x$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια ως προς t εξίσωση: $2t^2 + 3t - 2 = 0$ (1)

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$ και ρίζες $t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$

Έτσι έχουμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$ και $\eta\mu x = -2$ (που είναι αδύνατη)

$$\text{Είναι: } \eta\mu x = \frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2\eta\mu 3x$ και $g(x) = 1 + 3\eta\mu \frac{x}{2}$ στο διάστημα της αντίστοιχης περιόδου.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \varepsilon\varphi 2x,$$

$$g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x,$$

$$h(x) = \varepsilon\varphi x$$

154.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές εξισώσεις

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(1 - \sigma\upsilon\nu x)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}) = 0$

ii. $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sqrt{3}$

iii. $\epsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$

iv. $2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $4 + 2\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii. $\eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ στο $(2\pi, 4\pi)$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3(1 - \eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\phi x$

ii. $2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$, στο $(4\pi, 5\pi)$

7. Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x - (\sqrt{2} + 2)\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$

8. Να λυθεί η εξίσωση: $\epsilon\phi^2 x - 3\epsilon\phi x + 2 = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$

ii. $\eta\mu^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Ε

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^3 x = 0$

(Υπ.: Παρατηρήστε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και διαιρέστε με $\sigma\upsilon\nu x$)