

Μάθημα
10

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ (ή μια πολυωνυμική ανίσωση $P(x) < 0$ ή $P(x) > 0$ ή $P(x) \leq 0$ ή $P(x) \geq 0$), παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ του πρώτου μέλους.

Για την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:

1. Σε πολυωνυμικές εξισώσεις με **ακέραιους συντελεστές** πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $a_0 \neq 0$.
2. Ένας αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \Leftrightarrow (x - \rho)$. Το x είναι παράγοντας του $P(x)$.
3. Σχήμα Horner - Διαίρεση πολυωνύμων

Σχόλιο

Οι γνωστές μέθοδοι παραγοντοποίησης, (κοινός παράγοντας, ομαδοποίηση, συμπλήρωση τετραγώνου, διαφορά τετραγώνων, κ.τ.λ.) δεν μπορούν να εφαρμοστούν πάντοτε, όμως όταν είναι δυνατή η χρήση τους, προτιμώνται διότι διευκολύνουν πολύ τη διαδικασία.

- Έτσι αν μετά την παραγοντοποίηση, το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται :

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x)$$

έχουμε :

1. Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0$$

Δηλαδή η λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$, ανάγεται στη λύση των εξισώσεων $P_i(x) = 0$, όπου $i = 1, 2, \dots, k$.

2. Για τις πολυωνυμικές ανισώσεις:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) < 0$$

Δηλαδή η λύση της πολυωνυμικής ανίσωσης $P(x) > 0$ ανάγεται στην εύρεση του προσήμου του γινομένου των παραγόντων $P_i(x)$, όπου $i = 1, 2, \dots, k$.

192. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις-Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης:

Βήμα 1: Αν η εξίσωση $P(x) = 0$, έχει ρητούς συντελεστές, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και καταλήγουμε σε εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τις **πιθανές ακέραιες ρίζες** ρ_i , που είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου.

Βήμα 3: Βρίσκουμε ποια απο τις πιθανές ακέραιες ρίζες μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)$.

Βήμα 4: Εφαρμόζουμε το σχήμα **Horner**, για τη ρίζα ρ_i που βρήκαμε και γράφουμε το πολυώνυμο στη μορφή: $P(x) = (x - \rho_i) \cdot \Pi_1(x)$, όπως προκύπτει απ' το σχήμα Horner.

Βήμα 5: Κάνουμε την εργασία απο το βήμα 2 έως το βήμα 4 για το πολυώνυμο $\Pi_1(x)$ και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία έως ότου το αρχικό πολυώνυμο $P(x)$ να γίνει γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πολυωνύμων.

Βήμα 6: Βρίσκουμε τις ρίζες του δευτεροβάθμιου $\Pi_1(x)$, αν υπάρχουν, με τη μέθοδο της διακρίνουσας. Γράφουμε το $P(x)$ σε μορφή γινομένου παραγόντων, οπότε έχουμε μία προς μία τις ρίζες.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$.

Λύση

Η εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές με σταθερό όρο $a_0 = -4$. Έτσι οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Διαπιστώνουμε: $P(1) = 1^4 - 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = -8 \neq 0$ (άρα ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$)

$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 = 0$ (άρα ο αριθμός -1 είναι ρίζα του $P(x)$)

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για $\rho_1 = -1$

Οπότε $P(x) = (x + 1)(x^3 - x^2 - 4)$

Για το $\Pi_1(x) = x^3 - x^2 - 4$, έχουμε:

1	0	-1	-4	-4	-1
	-1	1	0	4	
1	-1	0	-4	0	

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ και $\Pi_1(1) = -4 \neq 0$

(**Σχόλιο:** Εφ' όσον ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$, δεν μπορεί να είναι ρίζα ούτε του $\Pi_1(x)$, και επομένως δεν ήταν απαραίτητη η δοκιμή.)

$\Pi_1(-1) = -6 \neq 0$, (άρα ο αριθμός -1 δεν είναι ρίζα του $\Pi_1(x)$)

$\Pi_1(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0$ (άρα ο αριθμός 2 είναι ρίζα του $\Pi_1(x)$)

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για $\rho_2 = 2$

1	-1	0	-4	2
	2	2	4	
1	1	2	0	

Έτσι έχουμε : $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+x+2)$

Για το $\Pi_2(x) = x^2 + x + 2$, επειδή $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$

το $\Pi_2(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έτσι οι ρίζες της εξίσωσης είναι : $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 2$.

Παρατήρηση

Η προηγούμενη απόδειξη έγινε για να φανούν τα βήματα που αναφέρουμε στη μέθοδο.

Μια σύντομη λύση είναι:

$$x^4 - (x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 4$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Λύση πολυωνυμικής ανισότητας

Βήμα 1: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ του πρώτου μέλους με τον τρόπο που αναφέρεται στη μέθοδο λύσης πολυωνυμικής εξίσωσης.

Βήμα 2: Απο την παραγοντοποιημένη τελική μορφή του $P(x)$ προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημο του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του x . Έτσι βάζουμε τις ρίζες σ' ένα πίνακα προσήμων και γράφουμε αναλυτικά το πρόσημο του κάθε παράγοντα.

Βήμα 3: Συμπεραίνουμε τελικά το πρόσημο του γινομένου των παραγόντων $P(x)$ και παίρνουμε ως λύσεις τα διαστήματα τα οποία μας υποδεικνύει η φορά της ανίσωσης.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ανίσωση : $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0$.

Λύση

Ονομάζουμε $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x$ το πολυώνυμο του πρώτου μέλους το οποίο θα παραγοντοποιήσουμε.

Το $P(x)$ έχει προφανώς παράγοντα τον x . ($\rho_1 = 0$)

$$\text{Έτσι } P(x) = x \cdot \underbrace{(-x^3 + 4x^2 - 4x + 3)}_{\Pi_1(x)}$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες για το $\Pi_1(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 3$: $\pm 1, \pm 3$.

$\Pi_1(1) = 2 \neq 0$, $\Pi_1(-1) = 12 \neq 0$, $\Pi_1(3) = 0$, άρα ο $\rho_2 = 3$ είναι ρίζα .

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στο $\Pi_1(x)$ για $\rho_2 = 3$.

-1	4	-4	3	3
	-3	3	-3	
-1	1	-1	0	

194. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Έτσι $P(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (-x^2 + x - 1)$

Για το $\Pi_2(x) = -x^2 + x - 1$ είναι $\Delta = 1^2 - 4(-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες.

Κάνουμε πίνακα προσήμων για τους παράγοντες του γινομένου :

$$P(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (-x^2 + x - 1)$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$x - 3$	-	-	0	+	
$-x^2 + x - 1$	-	-	-	-	
P(x)	-	0	+	0	-

Επειδή ζητείται $P(x) \leq 0$ ως σύνολο λύσεων παίρνουμε τα διαστήματα όπου το $P(x)$ δεν είναι θετικό. Επομένως $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Λύση προβλημάτων με πολώνυμα:

Διαβάζουμε προσεκτικά τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος

Προσπαθούμε να ξεκαθαρίσουμε τα εξής:

- Ποια είναι η μεταβλητή (συνήθως x ή t) της οποίας ζητείται η τιμή.
- Ποιο είναι το μέγεθος στο οποίο αναφέρεται η συνθήκη του προβλήματος και ποιο πολώνυμο ($P(x)$) εκφράζει το μέγεθος αυτό συναρτήσει της μεταβλητής που διακρίναμε πριν.

Εφαρμόζοντας την απαίτηση-συνθήκη του ερωτήματος (ή γενικότερα του προβλήματος), ανάγουμε την λύση του προβλήματος στη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης ή ανίσωσης, είτε στην εύρεση αγνώστων συντελεστών (παραμέτρων) του πολυνύμου.

Παράδειγμα 3

Ο διαστημικός σταθμός S.I.S. έχει αποθηκευμένα αποθέματα οξυγόνου $a = 27$ τόνους, αλλά και συσκευές παραγωγής οξυγόνου που δίνουν σύμφωνα με τον κατασκευαστή

$\Pi(x) = 4x^2 + 5x$ τόνους οξυγόνου συνολικά μέχρι το x έτος λειτουργίας τους. Η κατανάλωση οξυγόνου στο σταθμό έχει εκτιμηθεί από το κέντρο διαστημικών ερευνών, να είναι συνολικά σε x χρόνια $K(x) = 2x^3 - 7x^2 + 15x + 2$ τόνοι.

α. Για πόσα χρόνια ο σταθμός θα έχει επάρκεια οξυγόνου ;

β. Πόσους επιπλέον τόνους οξυγόνου θα έπρεπε να έχει αποθηκευμένους αρχικά, ώστε να έχει επάρκεια για ένα χρόνο παραπάνω ;

Λύση

Ονομάζουμε $P(x)$ το πολυώνυμο που εκφράζει την περίσσεια οξυγόνου τη x χρονιά.

$$\alpha. \text{ Έτσι } P(x) = \Pi(x) + \alpha - K(x) = (4x^2 + 5x) + 27 - (2x^3 - 7x^2 + 15x + 2) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = -2x^3 + 11x^2 - 10x + 25$$

Αρκεί να βρούμε λοιπόν, ποια χρονιά (x) θα μηδενιστεί η περίσσεια οξυγόνου δηλαδή για ποιο x ισχύει: $P(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 11x^2 - 10x + 25 = 0$.

Πιθανές ακέραιες ρίζες : $\pm 1, \pm 5, \pm 25$

$$P(1) = 24 \neq 0, P(-1) = 48 \neq 0, P(5) = 0, \text{ άρα } \rho_1 = 5 \text{ είναι ρίζα του } P(x).$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner

$$\text{Έτσι } P(x) = (x - 5) \cdot (-2x^2 + x - 5)$$

Για το $\Pi_1(x) = -2x^2 + x - 5$ έχουμε :

$$\Delta = 1 - 4(-2)(-5) = -39 < 0, \text{ άρα το } \Pi_1(x) \text{ δεν έχει ρίζες.}$$

Άρα ο σταθμός θα έχει επάρκεια για 5 χρόνια.

-2	11	-10	25	5
		-10	5	-25
-2	1	-5	0	

β. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η περίσσεια οξυγόνου τη x χρονιά είναι

$$P(x) = -2x^3 + 11x^2 - 10x + 25. \text{ Έστω } \beta \text{ το επιπλέον οξυγόνο που πρέπει να έχει ο σταθμός}$$

$$\text{τότε η ποσότητα γίνεται } P(x) = -2x^3 + 11x^2 - 10x + 25 + \beta.$$

Απαιτείται ο σταθμός να έχει επάρκεια οξυγόνου για 6 χρόνια, που σημαίνει ότι :

την $x = 6$ χρονιά το οξυγόνο θα τελειώσει άρα :

$$P(6) = 0 \Leftrightarrow -432 + 396 - 60 + 25 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 71$$

Άρα ο σταθμός θα έπρεπε να είχε αποθηκευμένους αρχικά 71 τόνους οξυγόνου επιπλέον.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Οι εξισώσεις της μορφής $ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ λέγονται διτετράγωνες και επιλύονται ως εξής:

1°: Θέτουμε $x^2 = y$, $y \geq 0$ (1) οπότε προκύπτει η εξίσωση $ay^2 + \beta y + \gamma = 0$ (επιλύουσα).

2°: Βρίσκουμε τις ρίζες της επιλύουσας.

3°: Από την (1) βρίσκουμε τις ρίζες της διτετράγωνης (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Λύση

Αν θέσουμε $x^2 = y$, $y \geq 0$ (1) η δοθείσα γράφεται: $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = 4$.

Οπότε από την (1) έχουμε:

196. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

$$\bullet x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\bullet x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Άρα οι ρίζες της είναι: $x = \pm 1$ ή $x = \pm 2$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Όταν ζητείται να λυθεί μια ρητή εξίσωση, τότε :

- Θέτουμε περιορισμούς, για τις παραστάσεις που βρίσκονται στους παρονομαστές. (Να είναι διάφορες του μηδενός)
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.
- Ελέγχουμε αν οι λύσεις ικανοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς.

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η εξίσωση : $x = \frac{x+7}{x+1} + \frac{6}{x^2+x}$

Λύση

Περιορισμοί: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ και $x^2+x \neq 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq -1 \end{cases}$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x+1)$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών : $x \cdot (x+1) \cdot x = x \cdot (x+1) \cdot \frac{x+7}{x+1} + x \cdot (x+1) \cdot \frac{6}{x^2+x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^3 + x^2 = x \cdot (x+7) + 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (1)$

Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση (1) : $P(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$ άρα $\rho_1 = -1$ είναι ρίζα.

Σχήμα Horner

1	0	-7	-6	-1
	-1	1	6	
1	-1	-6	0	

Άρα $P(x) = (x+1) \cdot (x^2 - x - 6)$. Με τη μέθοδο της διακρίνουσας βρίσκουμε ότι οι ρίζες του

$\Pi(x) = x^2 - x - 6$ είναι: $\rho_2 = -2$ και $\rho_3 = 3$.

Όμως η ρίζα $\rho_1 = -1$ απορρίπτεται, διότι δεν ικανοποιεί τους αρχικούς περιορισμούς

Έτσι οι λύσεις είναι: $x = -2$ ή $x = 3$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν δίνεται άρρητη εξίσωση, τότε :

- Θέτουμε περιορισμούς για τις υπόριζες παραστάσεις. (Να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός)
- Προσαρμόζουμε κατάλληλα τα δύο μέλη, (έτσι ώστε υψώνοντας σε κατάλληλη δύναμη, να απαλοίσουμε όσο το δυνατόν με λιγότερα βήματα τις ρίζες) και υψώνουμε σε κατάλληλη δύναμη.
- Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει, και ελέγχουμε αν οι ρίζες ικανοποιούν τους περιορισμούς, αλλά και την αρχική εξίσωση.

Παράδειγμα 6

Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{5-x} - x = 1$

Λύση

(Προσαρμογή)

$$\sqrt{5-x} - x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = x+1 \quad (1)$$

Περιορισμοί: $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$

$$\text{και } x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Έτσι τελικά πρέπει : $x \in [-1, 5]$

Υψώνοντας τα μέλη της (1) στο τετράγωνο, έχουμε :

$$(\sqrt{5-x})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 5-x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -4.$$

Η λύση $x = -4$, απορρίπτεται λόγω περιορισμών, ενώ η λύση $x = 1$ επαληθεύει την αρχική εξίσωση, άρα είναι η μοναδική λύση.

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{6} = 0$

Λύση

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών: $\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

Ονομάζουμε : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

Πιθανές ακέραιες ρίζες : ± 1 και $P(1) = 2 - 3 + 2 - 1 = 0$. Άρα $\rho_1 = 1$ είναι ρίζα του $P(x)$.

Σχήμα Horner :

2	-3	2	-1	1
	2	-1	1	
2	-1	1	0	

198. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Έτσι: $P(x) = (x-1) \cdot (2x^2 - x + 1)$ Για το $\Pi(x) = 2x^2 - x + 1$ έχουμε: $\Delta = -7 < 0$, άρα δεν έχει ρίζες. Έτσι μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση: $x^3 - \alpha x^2 - x + \alpha = 0$, για κάθε τιμή του πραγματικού α .

Λύση
Σχόλιο

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν ο α είναι ακέραιος, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των ακεραίων ριζών. Έτσι θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο του πρώτου μέλους με άλλες μεθόδους.

Ονομάζουμε $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - x + \alpha$ έτσι έχουμε:

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 - x + \alpha = x^2 \cdot (x - \alpha) - (x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot (x^2 - 1) = (x - \alpha) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

Έτσι, για κάθε α πραγματικό οι λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι: $x = \alpha$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Άσκηση 3

Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \leq 1$

Λύση

Περιορισμοί: $x \geq 0$ και $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα $x \in [1, +\infty)$

Επειδή τα μέλη της ανίσωσης είναι θετικά, υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x \cdot (x-1)} \leq -2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x \cdot (x-1)} \leq 1 - x \quad (1)$$

Αν $1 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$ η ανίσωση (1) είναι αδύνατη

Αν $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$ όποτε λόγω των αρχικών περιορισμών πρέπει: $x = 1$

Για $x = 1$ η αρχική ανίσωση επαληθεύεται.

$$\sqrt{1} + \sqrt{1-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1$$

Άρα η μοναδική λύση της αρχικής ανίσωσης είναι ο αριθμός: $x = 1$

Άσκηση 4

Να λύσετε την εξίσωση: $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η $x = 0$ δεν είναι ρίζα της. Έτσι για $x \neq 0$ διαιρούμε με x^2 και η δοθείσα

$$\text{γράφεται: } 6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Αν θέσουμε } x + \frac{1}{x} = y \quad (2) \quad \text{τότε} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Οπότε η (1) γίνεται: $6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$ ή $y = -\frac{10}{3}$

Αρα από την (2) έχουμε:

• $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \frac{1}{2}$

• $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = -10x \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = -\frac{1}{3}$

Αρα οι ρίζες της είναι: $x = 2$ ή $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -3$ ή $x = -\frac{1}{3}$.

Σχόλιο

Οι εξισώσεις των οποίων οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν από τα άκρα είναι ίσοι ανήκουν σε μια ευρύτερη κατηγορία εξισώσεων που λέγονται αντίστροφες.

Για την επίλυσή τους:

• Αν είναι άρτιου βαθμού τότε:

1. Διαιρούμε με $x^{v/2}$ όπου v ο βαθμός της (για $x \neq 0$)

2. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ κ.λ.π.

• Αν είναι περιττού βαθμού με σχήμα Horner (ή παραγοντοποίηση) αναγόμεστε σε αντίστροφη άρτιου βαθμού.

Μια πολυωνυμική εξίσωση λέγεται αντίστροφη όταν για κάθε ρίζα της $\rho \neq 0$ είναι και ο $\frac{1}{\rho}$ ρίζα της.

Άσκηση 5

Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^3 x - 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x - 1 = 0$

Λύση

Αν θέσουμε $\eta\mu x = y$, $-1 \leq y \leq 1$ (1) η δοθείσα γράφεται: $2y^3 - 5y^2 + 4y - 1 = 0$ (2).

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της (2) είναι: ± 1 .

Κάνουμε σχήμα Horner:

2	-5	4	-1	1
	2	-3	1	
2	-3	1	0	

Έτσι η (2) γράφεται: $(y-1)(2y^2 - 3y + 1) = 0$ άρα

$y-1=0$ ή $2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y=1$ ή $(y=1$ ή $y=\frac{1}{2})$

Αρα $y=1$ ή $y=\frac{1}{2}$

Οπότε από την (1) έχουμε:

• $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

200. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

$$\bullet \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα οι ρίζες της είναι: $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$

Άσκηση 6

Να λύσετε την ανίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$

Λύση

Η παράσταση $x^4 - 7x^2 + 12$, αν θέσουμε $x^2 = y$, με $y \geq 0$ (1) γράφεται:

$$y^2 - 7y + 12 = (y-3)(y-4)$$

Οπότε λόγω της (1) έχουμε:

$$x^4 - 7x^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 2)(x + 2) < 0$$

Για να βρούμε το πρόσημο του 1ου μέλους σχηματίζουμε τον πίνακα:

+	-	+	-	+	
$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για τα $x \in \mathbb{R}$ με :

$$-2 < x < -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \sqrt{3} < x < 2.$$

Δ.**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 8 + (x-2)(2x+1) = x^2 - 5x + 6$
2. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^3 + 2) + x^2(x+1) = 4x + 16 + 2x^2(x-1)$
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.
4. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 + ax^2 - 3x + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.
5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ γ. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$	β. $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ δ. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$
---	--

6. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το πολώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + 17x^2 + 2x + \beta$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

7. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α. $x^4 - 2x^3 - x + 2 \geq 0$

β. $-x^4 + x^3 - x + 1 \leq 0$

γ. $\frac{1}{10}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} \leq 0$

δ. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6 > 0$

8. Μια εταιρία κατασκευής ηλεκτρικών συσκευών έχει υπολογίσει ότι το κόστος κατασκευής x χιλιάδων συσκευών δίνεται από τον τύπο : $K(x) = x^4 + x^2 + 6$ σε χιλιάδες €, ενώ τα έσοδα από την πώληση τους, αναμένονται να είναι : $E(x) = 4x^3 - x^2 - x$ χιλιάδες €.

α. Πόσες χιλιάδες συσκευές πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον ώστε η εταιρία να έχει κέρδος;

β. Από πόσες χιλιάδες συσκευές και πάνω η εταιρία θα έχει ξανά ζημία ;

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\frac{x^2}{2(x-2)} = \frac{16}{x^2-4} + \frac{4}{x+2}$

β. $\frac{x^3+2x-4}{x-2} = x^2$

γ. $\sqrt{3x+2} = x$

δ. $\sqrt{x^2+3} = 2\sqrt{x}$

10. Να λύσετε την εξίσωση: $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

11. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 9) = -21$

Ε

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

1. Να λυθεί η εξίσωση : $(4x^2 - x + 1)^2 - 27x^2(x-1)^2 = 0$

(Υπ.: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα “διαφορά τετραγώνων”)

2. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση : $x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32} = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες και να βρεθεί μια ρίζα της.

3. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^3-1}{x^2} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{2} < 0$

202. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^v + 4ax - 1 = 0$ με $v \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}^*$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
5. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{Z}^*$ ώστε η εξίσωση $x^3 + (2-a)x + a - 1 = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση για την μεγαλύτερη τιμή του a που βρήκατε.
6. Αν η εξίσωση $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει ρίζα τον ρ και ισχύει $a\rho^2 + \gamma = 0$ (1), να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης.
7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 \sin 3\theta + 5x^2 \sin 2\theta + 5x \sin \theta + 1$ να έχει παράγοντα το $x+1$.
8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + ax + \beta$. Να βρείτε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-2$ και διαιρούμενο με το $x+1$ να δίνει υπόλοιπο 3. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Θεωρία.

- α) Πώς βρίσκουμε το πρόσημο ενός γινομένου της μορφής $P(x) = A(x) \cdot B(x) \dots \Phi(x)$ όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots \Phi(x)$, είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα $ax + \beta$ ή τριώνυμα $ax^2 + \beta x + \gamma$;
- β) Πως λύνουμε ανισώσεις γινομένου, της παραπάνω μορφής,
 $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$.

Απάντηση:

- α) Βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα ξεχωριστά και κατόπιν το πρόσημο όλου του γινομένου $P(x)$.
- β) Βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ και κατόπιν εκείνα τα x για τα οποία αληθεύει η κάθε μια από τις ανισώσεις $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$

Θεωρία.

Πώς λύνουμε ανισώσεις της μορφής

$$\alpha) \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \beta) \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \quad \gamma) \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad \delta) \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0, \quad B(x) \neq 0$$

Απάντηση:

- α) Επειδή $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)$ και $B(x)$ ομόσημα $\Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$. Δηλαδή η επίλυση του πηλίκου $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ανάγεται στην επίλυση της ανίσωσης του γινομένου $A(x) \cdot B(x) > 0$

- β) Επειδή $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x), B(x)$ ομόσημα $\Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0$ με $B(x) \neq 0$.

Άρα η επίλυση του πηλίκου $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ ανάγεται στην επίλυση του γινομένου $A(x) \cdot B(x) \geq 0$ με $B(x) \neq 0$

- γ) όμοια με α)

- δ) όμοια με β)

204. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα

Να βρείτε το πρόσημο του $f(x) = (1 - 3x)(2x + 4)(4 - x)(x - 6)(7 - x)$

Λύση:

Μέθοδος

Όταν έχουμε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων μπορούμε να βρούμε τα πρόσημο ως εξής:

• Βήμα 1ο

Φέρνουμε το $f(x)$ στην μορφή $f(x) = \pm(\alpha_1 x \pm \beta_1) \cdot (\alpha_2 x \pm \beta_2) \dots (\alpha_n x \pm \beta_n)$ με $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Συγκεκριμένα για το παράδειγμά μας έχουμε: $f(x) = -(3x-1)(2x+4)(x-4)(x-6)(x-7)$

• Βήμα 2ο

Βρίσκουμε τις ρίζες των πρωτοβάθμιων παραγόντων Δηλαδή:

$$\begin{array}{lll} 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} & 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2 & x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \\ x-6=0 \Leftrightarrow x=6 & x-7=0 \Leftrightarrow x=7 & \end{array}$$

• Βήμα 3ο

Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμων βάζοντας στο πρώτο από δεξιά διάστημα το πρόσημο $+$ ή $-$ που βρίσκεται μπροστά από τις παρενθέσεις του $f(x)$ και στα επόμενα διαστήματα βάζοντας το πρόσημο εναλλάξ. Στο παράδειγμά μας έχουμε:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	4	6	7	$+\infty$
f(x)	+	-	+	-	+	-	+

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = (2 - x)^6 (x - 4)^7 (3 - x)^{2002} (5 - x)^{2003}$

Λύση:

$$f(x) = -(x-2)^6 (x-4)^7 (x-3)^{2002} (x-5)^{2003}$$

Οι ρίζες των παραγόντων είναι:

$$\begin{array}{ll} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 & x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3 & x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \end{array}$$

Έτσι έχουμε:

x	$-\infty$	2	3	4	5	$+\infty$
f(x)	-	-	-	+	-	-

Σχόλιο

- Τις δυνάμεις με περιττούς εκθέτες τις θεωρούμε σαν δύναμη με εκθέτη το 1.
- Στις δυνάμεις με άρτιους εκθέτες όταν θα τοποθετήσουμε στον πίνακα προσήμων τις ρίζες, δεξιά και αριστερά από τις ρίζες θα βάζουμε το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} < 2$

Λύση:

$$Ε.Κ.Π. = (x-1)(3x+1)$$

Περιορισμοί:

$$\text{Πρέπει το } Ε.Κ.Π. \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1 \neq 0 \text{ και } 3x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -\frac{1}{3}$$

Η ανίσωση γίνεται:

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} - \frac{2}{1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x+1)2x + (x-1)(3x-1) - 2(x-1)(3x+1)}{(x-1)(3x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 + 2x + 3x^2 - x - 3x + 1 - 2(3x^2 + x - 3x - 1)}{(x-1)(3x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 2x + 1 - 6x^2 - 2x + 6x + 2}{(x-1)(3x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 2x + 3}{(x-1)(3x+1)} < 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 2x + 3)(x-1)(3x+1) < 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων:

$$3x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ αδύνατη (διότι } \Delta = -32 < 0).$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$3x^2+2x+3$	+	+		+	+
$x-1$	-	-		+	+
$3x+1$	-	+		+	+
$\Gamma(x)$	+	-		+	+

$$\text{Άρα } x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right).$$

Σχόλιο

Σε κλασματικές ανισώσεις (δηλαδή σε ανισώσεις που ο άγνωστος βρίσκεται στον παρονομαστή) ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΚΑΝΟΥΜΕ απαλοιφή παρονομαστών, (εκτός αν ξέρουμε το πρόσημό του Ε.Κ.Π τους). Μεταφέρουμε τις παραστάσεις του δευτέρου μέλους στο πρώτο μέλος, κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και το ένα κλάσμα που δημιουργείται το κάνουμε γινόμενο $\Gamma(x) < 0$ ή $\Gamma(x) > 0$.

206. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις- Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{(3-x)(x^2+4x+4)}{(-x^2+5x-6)(x-1)} \geq 0$

Λύση:

Περιορισμοί:

$$\text{Πρέπει } (-x^2+5x-6)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+5x-6 \neq 0 \\ \text{και} \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \text{ και } x \neq 3 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

• Για την επίλυση της ανίσωσης κάνουμε το κλάσμα γινόμενο και έχουμε:

$$(3-x)(x^2+4x+4)(-x^2+5x-6)(x-1) \geq 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων:

$$3-x=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$-x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Έχουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
3-x	+	+	+	+	+	-
x^2+4x+4	+	+	+	+	+	+
$-x^2+5x-6$	-	-	-	-	+	-
x-1	-	-	+	+	+	+
$\Gamma(x)$	+	+	-	+	+	+

Άρα $\Gamma(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.