

5ο Κεφάλαιο

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ιδιότητες των δυνάμεων

• Έστω $\alpha, \beta > 0$ και $x_1, x_2, x \in \mathbb{R}$, τότε:		
i. $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$	ii. $\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \alpha^{x_1-x_2}$	iii. $(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$
iv. $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$	v. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$	

Επίσης ισχύουν:

- $\alpha^0 = 1, \alpha \in \mathbb{R}^*$
- $\sqrt[v]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{v}}, \mu \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{N}^*$
- $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, v \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
- Αν $x > 0$ ορίζουμε: $0^x = 0$.

Εκθετική συνάρτηση

Ορισμός

Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση α την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$.

Παρατήρηση

Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$

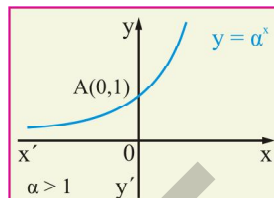
Ιδιότητες

- Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$
- Σύνολο τιμών: Το διάστημα $(0, +\infty)$
- Μονοτονία

I. Αν $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.

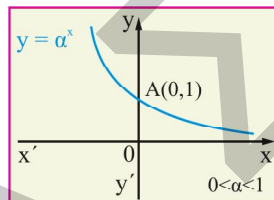
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον αρνητικό ημιάξονα Ox'



II. Αν $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$.

Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον θετικό ημιάξονα Ox .



Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

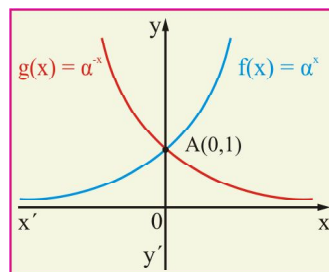
Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$ ενώ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ αφού $\alpha^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Για τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = \frac{1}{\alpha^x} = \alpha^{-x} = f(-x).$$

Δηλαδή οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ όπως φαίνεται στο σχήμα με $\alpha > 1$.



Ο αριθμός e

Καθώς το n αυξάνει απεριόριστα, οι όροι της ακολουθίας $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ προσεγγίζουν έναν άρρητο αριθμό που τον συμβολίζουμε με e και είναι $e \approx 2,718$.

Συμβολικά γράφουμε: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$ ισχύουν όσα αναφέραμε παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$ (αφού $\alpha = e = 2,718 \dots > 1$)

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μια εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e είναι η $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$ που είναι γνωστή και ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής** και χρησιμοποιείται για την μελέτη μεγεθών τα οποία μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου στην Φυσική, στη Βιολογία κλπ.

Το Q_0 είναι θετικός αριθμός και αποτελεί την τιμή της συνάρτησης Q για $t = 0$.

Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και δηλώνει τον νόμο της εκθετικής αύξησης.

Αν $c < 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα και δηλώνει τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Όταν μας ζητούν να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού και την μονοτονία μιάς εκθετικής συνάρτησης εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha-2}\right)^x$:

- i. να ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- ii. να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- iii. να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Είναι:

$$\text{i. Πρέπει } \alpha - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2 \text{ και } \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} > 0 \Leftrightarrow (2\alpha+1) \cdot (\alpha-2) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > 2$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Πρέπει να ισχύει: } \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} > 1 &\Leftrightarrow \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+1-\alpha+2}{\alpha-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+3}{\alpha-2} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha+3) \cdot (\alpha-2) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -3 \text{ ή } \alpha > 2 \end{aligned}$$

$$\text{iii. Πρέπει να ισχύει: } 0 < \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} < 1 \text{ και } \alpha \neq 2$$

$$1. \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} > 0 \Leftrightarrow (2\alpha+1) \cdot (\alpha-2) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > 2$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} < 1 &\Leftrightarrow \frac{2\alpha+1}{\alpha-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+1-\alpha+2}{\alpha-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+3}{\alpha-2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha+3) \cdot (\alpha-2) < 0 \Leftrightarrow -3 < \alpha < 2 \end{aligned}$$

$$\text{Οι 1 και 2 συναληθεύουν για } -3 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Επίλυση εκθετικών εξισώσεων, εξισώσεων δηλαδή των οποίων ο άγνωστος ή παράστασή του εμφανίζονται σε εκθέτη δύναμης.

Βασικές μορφές εκθετικών εξισώσεων

- Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $a^x = \beta$ όπου $a, \beta > 0$, $a \neq 1$ και το β γράφεται σαν μια δύναμη του a . (η περίπτωση που το β δεν γράφεται σαν μια δύναμη του a εξετάζεται με την βοήθεια λογαρίθμων). Αν $\beta = a^k$ τότε $a^x = \beta \Leftrightarrow a^x = a^k \Leftrightarrow x = k$.

Παράδειγμα 2

Να επιλυθεί η εξίσωση: $5^x = 625$

Λύση

Είναι: $5^x = 625 \Leftrightarrow 5^x = 5^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)} = \beta$ όπου $a, \beta > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ μια πραγματική συνάρτηση και το β γράφεται σαν μια δύναμη του a . (η περίπτωση που το β δεν γράφεται σαν μια δύναμη του a εξετάζεται με την βοήθεια λογαρίθμων).

Αν $\beta = a^k$ τότε $a^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^k \Leftrightarrow f(x) = k$.

Παράδειγμα 3

Να επιλυθεί η εξίσωση: $3^{x^2-5x+11} = 243$

Λύση

Είναι: $3^{x^2-5x+11} = 243 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+11} = 3^5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 11 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)} = \beta^{g(x)}$ όπου $a, \beta > 0$, $a \neq 1$, $\beta \neq 1$, $f(x), g(x)$ πραγματικές συναρτήσεις και το β γράφεται σαν μια δύναμη του a . (η περίπτωση που το β δεν γράφεται σαν μια δύναμη του a εξετάζεται με την βοήθεια λογαρίθμων) Αν

$\beta = a^k$ τότε $a^{f(x)} = \beta^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{k \cdot g(x)} \Leftrightarrow f(x) = k \cdot g(x)$

Παράδειγμα 4

Να επιλυθεί η εξίσωση: $2^{x^2-2x} = 8^{x-2}$.

Λύση

Είναι: $2^{x^2-2x} = 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} = 2^{3(x-2)} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} = 2^{3x-6} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $f(a^x) = 0$, $a > 0$ και $a \neq 1$.

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $a^x = y$ και λύνουμε την $f(y) = 0$ οπότε αναγόμεστε στην **Κατηγορία – Μέθοδο 2**.

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η εξίσωση: $2 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x - 6 = 0$

Λύση

$$2 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(3^2)^x - 4 \cdot 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x - 6 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } 3^x = y > 0 \text{ οπότε προκύπτει: } 2y^2 - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Είναι τελικά $y = 3$. Άρα $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $f(a^x) = g(b^x)$, $a > 0$, $b > 0$ και $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq b$.

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = y \text{ οπότε αναγόμεστε στην } \textbf{Κατηγορία – Μέθοδο 2}.$$

Παράδειγμα 6

Να λυθεί η εξίσωση: $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

Λύση

$$\text{Είναι: } 3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3} \Leftrightarrow 3^x \cdot 3 - 2^x = 3^x \cdot 3^{-1} + 2^x \cdot 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot 3 - 3^x \cdot \frac{1}{3} = 2^x + 8 \cdot 2^x \Leftrightarrow 3^x \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 2^x \cdot (8 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{8}{3} = 2^x \cdot 9 \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{9}{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $(f(x))^{g(x)} = 1$ όπου $f(x)$, $g(x)$ πραγματικές συναρτήσεις. Οι εξισώσεις αυτές έχουν λύσεις προφανώς τις λύσεις των εξισώσεων :

i. $f(x) = 1$

ii. $g(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$, και

iii. $f(x) = -1$ και $g(x)$ άρτιος.

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 - 7x + 10)^{2x^2 - 10x} = 1$ (1)

Λύση

Η εξίσωση (1) αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

i. $x^2 - 7x + 10 = 1$

ii. $2x^2 - 10x = 0$ και $x^2 - 7x + 10 \neq 0$

iii. $x^2 - 7x + 10 = -1$ και $2x^2 - 10x$ άρτιος

i. Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 7x + 10 = 1$ είναι

$$x^2 - 7x + 10 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

ii. Πρέπει: $\begin{cases} 2x^2 - 10x = 0 \\ x^2 - 7x + 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \cdot (x - 5) = 0 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 5 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

iii. Είναι: $x^2 - 7x + 10 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{4}$

Για αυτά τα x πρέπει το $2x^2 - 10x$ να είναι άρτιος το οποίο φυσικά δεν συμβαίνει. Άρα, οι

$x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{4}$ απορρίπτονται.

Άρα οι λύσεις της (1) είναι: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Επίλυση εκθετικών ανισώσεων, ανισώσεων δηλαδή των οποίων ο άγνωστος ή παράσταση του εμφανίζονται σε εκθέτη δύναμης.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτές γενικά χρησιμοποιούμε τα συμπεράσματα της μονοτονίας της εκθετικής συνάρτησης και καταλήγουμε σε μια γνωστή ανίσωση.

Χρησιμοποιούμε δηλαδή τις σχέσεις

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2, \text{ αν } a > 1 \quad \text{και} \quad a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \text{ αν } 0 < a < 1$$

Παραδειγμα 8

Να λυθεί η ανίσωση: $27^{\frac{x+1}{x-2}} < 3^{2x-4}$

Λύση

$$\text{Είναι: } 27^{\frac{x+1}{x-2}} < 3^{2x-4} \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} < 3^{2x-4} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x+3}{x-2}} < 3^{2x-4} \Leftrightarrow \frac{3x+3}{x-2} < 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+3}{x-2} - (2x-4) < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+3-(2x-4)\cdot(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+11x-5}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (-2x^2+11x-5)\cdot(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-3-\sqrt{71}}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{71}}{2}, +\infty\right)$$

Παράδειγμα 9

Να λυθεί η ανίσωση: $3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}}$

Λύση

$$\text{Είναι: } 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} > 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right) > 4^x \cdot \left(4^{\frac{1}{2}} - 2^{-1}\right) \Leftrightarrow 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 4^x \left(2 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} > 4^x \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^x > \frac{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}}{2^3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Παράδειγμα 10

Να λυθεί η ανίσωση: $e^x - e^{-x} < 0$.

Λύση

Είναι: $e^x - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow x < -x \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Επίλυση εκθετικών συστημάτων

Για να λύσουμε ένα εκθετικό σύστημα, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των δυνάμεων και τις μεθόδους που αναφέραμε πιο πάνω για την επίλυση μίας εκθετικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 11

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 8^{2x} + 27^{\frac{y}{3}} = 5 \\ 8^{12x} - 3^{2y} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x} + 3^y = 5 \\ (2^{6x})^2 - (3^y)^2 = -5 \end{cases}$$

Λύση

Θέτουμε $2^{6x} = \alpha$ και $3^y = \beta$ οπότε το σύστημα γίνεται:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha^2 - \beta^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 5 \cdot (\alpha - \beta) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x} = 2 \\ 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = 1 \end{cases}$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Άσκηση 1**

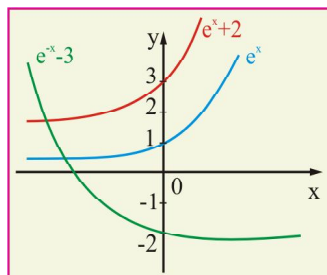
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^x + 2, \quad h(x) = e^{-x} - 3$$

Λύση

Η $g(x) = e^x + 2$ προκύπτει από την $f(x) = e^x$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Η $h(x) = e^{-x} - 3 = \left(\frac{1}{e}\right)^x - 3$ προκύπτει από την $t(x) = e^{-x}$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



Άσκηση 2

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση: $f(x) = e^{-3x+5}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε $-3x_1 > -3x_2$ οπότε $-3x_1 + 5 > -3x_2 + 5$ και επειδή $e > 1$

$$e^{-3x_1+5} > e^{-3x_2+5} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί: α. $2^{\frac{5}{6}}, 2^{\frac{7}{8}}$, β. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{3}{4}\right)^2$, γ. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{5}\right)^6}, \sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^{11}}$

Λύση

α. Έστω η $f(x) = 2^x$

Επειδή $2 > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\text{αφού } \frac{5}{6} < \frac{7}{8} \text{ είναι } f\left(\frac{5}{6}\right) < f\left(\frac{7}{8}\right) \text{ δηλαδή } 2^{\frac{5}{6}} < 2^{\frac{7}{8}}$$

β. Έστω $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

Επειδή $\frac{3}{4} < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$\text{αφού } \frac{1}{3} < 2 \text{ είναι } f\left(\frac{1}{3}\right) > f(2) \text{ δηλαδή } \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

γ. Είναι $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{5}\right)^6} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6}{5}}$ και $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^{11}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{11}{7}}$. Έστω $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ και

επειδή $\frac{2}{5} < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε αφού $\frac{6}{5} < \frac{11}{7}$ είναι $f\left(\frac{6}{5}\right) > f\left(\frac{11}{7}\right)$

$$\text{δηλαδή } \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6}{5}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{11}{7}} \text{ άρα } \sqrt[5]{\left(\frac{2}{5}\right)^6} > \sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^{11}}$$

Άσκηση 4

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3^x = 81^{2-|x|}$ ii. $2^{3x} = 512$ iii. $2^{2x-1} - 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$

Λύση

i. Είναι $3^x = 81^{2-|x|} \Leftrightarrow 3^x = 3^{4(2-|x|)} \Leftrightarrow x = 4 \cdot (2-|x|) \Leftrightarrow x = 8-4|x|$ (1)

Αν $x \geq 0$ η (1) δίνει: $x = 8-4x \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$ δεκτή

Αν $x < 0$ η (1) δίνει: $x = 8+4x \Leftrightarrow -3x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$ δεκτή

ii. $2^{3x} = 512 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^9 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

iii. $2^{2x-1} - 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 3^x + 2^{2(x+\frac{1}{2})} + 3^{2(\frac{x}{2}+1)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{2} - 3^x + 2^{2x} \cdot 2 + 3^x \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = 3^x (-9+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \cdot \frac{5}{2} = 3^x \cdot (-8) \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{-8}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \right)^x = -\frac{16}{5} \text{ αδύνατη αφού } \left(\frac{4}{3} \right)^x > 0$$

Άσκηση 5Να λυθεί η εξίσωση: $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$ **Λύση**

Είναι $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4^x}{9^x} + 3 \cdot \frac{9^x}{9^x} = 5 \cdot \frac{6^x}{9^x} \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^x + 3 = 5 \cdot \frac{3^x \cdot 2^x}{3^x \cdot 3^x} \Leftrightarrow$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} + 3 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x \Leftrightarrow 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $y = \left(\frac{2}{3} \right)^x > 0$ οπότε η (1) γίνεται: $2y^2 - 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \\ y_2 = 1 \end{cases}$

Άρα $\begin{cases} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3} \right)^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \\ \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Άσκηση 6

Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-2} - e^x$

βρίσκεται: i. πάνω από τον άξονα $x'x$, ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει: } f(x) > 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-2} - e^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-2} > e^x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-(x^2-2)} > e^x \Leftrightarrow -(x^2-2) > x \Leftrightarrow -x^2 + 2 - x > 0 \Leftrightarrow \\ &x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Πρέπει: } f(x) < 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-2} - e^x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-2} < e^x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-(x^2-2)} < e^x \Leftrightarrow -(x^2-2) < x \Leftrightarrow -x^2 + 2 - x < 0 \Leftrightarrow \\ &x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{3^{2x} - 28 \cdot 3^{x-1} + 3}$

Λύση

$$\text{Θα πρέπει } 3^{2x} - 28 \cdot 3^{x-1} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - \frac{28}{3} \cdot 3^x + 3 \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Αν θέσουμε } y = 3^x \text{ η (1) γίνεται: } y^2 - \frac{28}{3} \cdot y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq \frac{1}{3} \text{ ή } y_2 \geq 9.$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } \bullet 3^x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x \leq 3^{-1} \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ και}$$

$$\bullet 3^x \geq 9 \Leftrightarrow 3^x \geq 3^2 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

Άσκηση 8

Να λυθεί η ανίσωση: $18^{8-4x} < (54\sqrt{2})^{3x-2}$

Λύση

$$\text{Είναι } 18^{8-4x} < (54\sqrt{2})^{3x-2} \Leftrightarrow \left((3\sqrt{2})^2\right)^{8-4x} < \left((3\sqrt{2})^3\right)^{3x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{2})^{2(8-4x)} < (3\sqrt{2})^{3(3x-2)} \Leftrightarrow 2 \cdot (8-4x) < 3 \cdot (3x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16-8x < 9x-6 \Leftrightarrow 22 < 17x \Leftrightarrow x > \frac{22}{17}$$

Άσκηση 9

Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$$

Λύση

Είναι: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y = \frac{54}{24} \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y = \frac{9}{4} \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+y} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ 3^{y-2} \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ 3^y \cdot \frac{1}{9} \cdot 2^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ (3 \cdot 2)^y = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ 6^y = 6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Δ.**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$

β. $2 \cdot 50^x = 9 \cdot 10^x + 5 \cdot 2^x$

γ. $3^{x+2} \cdot 9^{x+1} = 81 \left(27^x + \frac{9}{3^x} - 1 \right)$

δ. $2^{3x} (1 - 2^{3x}) + 3(2^{5x} - 4^{2x}) = 0$

(Απ.: α. $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$, β. $x=1$, γ. $x=2$, δ. $x=0$)

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $3^{x^2-7x+12} < 1$

β. $5 \cdot 9^x - 8 \cdot 15^x + 3 \cdot 25^x < 0$

γ. $25^{|x-2|-2} > 5^{|x|-3}$

δ. $2^x + \frac{8}{2^x} < 5$

(Απ.: α. $3 < x < 4$, β. $0 < x < 1$, γ. $x < 0, 0 < x < 1, x > 5$, δ. $2 < x < 1$)

3. Να λυθούν τα συστήματα :

$$(A) \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-2} \cdot 9^{\frac{y}{2}-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(Γ) \begin{cases} 3^x = 4y \\ 4^x = 3y \end{cases}$$

$$(Δ) \begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$(Απ.: A. \begin{cases} x = \log_2 \frac{1055}{19} \\ y = \log_2 \frac{96}{19} \end{cases}, B. (x, y) = (2, 3), Γ. (x, y) = \left(-1, \frac{1}{12}\right), Δ. (x, y) = (1, 1))$$

4. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i. f(x) = x^x$$

$$ii. g(x) = \left(3\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)^x$$

$$iii. h(x) = \left(\frac{5-\alpha}{\alpha+4}\right)^x$$

(Απ.: i. $x > 0$, ii. $\alpha > 0$, iii. $-4 < \alpha < 5$)

5. Για ποιες τιμές του α οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες;

$$f(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^x$$

$$g(x) = \left(2\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^x$$

(Απ.: i. $\alpha < -1$, ii. $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$)

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i. 3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$$

$$ii. 3 \cdot 9 - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$$

$$iii. 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 128$$

$$iv. 5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i. x^x = 4$$

$$ii. (x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 7$$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i. 7^{\frac{x+4}{3}} - 5^{3x} = 2 \left(7^{\frac{x+1}{3}} + 5^{3x-1}\right) \quad ii. 7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 4^{\eta_{\mu x}+1} - 9 \cdot 2^{\eta_{\mu x}} + 2 = 0$$

$$\beta. 2^{\eta_{\mu 2x} + \sigma_{\nu x}} = 4^{1 - \eta_{\mu} \frac{2x}{2}}$$

$$\gamma. (x^2 - x - 2)^{4x-1} = 1$$

$$(\text{Απ.: } \alpha. x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}, \beta. x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}, \gamma. x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2})$$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha. \frac{8 \cdot 2^{x-1} + 1}{2^x + \frac{5}{2}} < 2$$

$$\beta. e^{-x} + e^x - e \geq \frac{1}{e}$$

$$\gamma. 16^{\eta_{\mu} 2x} + 4^{\sigma_{\nu} 2x} \leq 4$$

$$(\text{Απ.: } \alpha. x < 1, \beta. x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \gamma. \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases})$$

11. Να βρείτε τις ακέραιες θετικές λύσεις της ανίσωσης: $\left(\frac{4}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1} \leq \frac{2}{5}$

$$(\text{Απ.: } x = 0, 1, 2)$$

12. Δίνονται οι εκθετικές συναρτήσεις f, g, h με βάσεις αντίστοιχα a, b, c . Αν για τους πραγματικούς μ, ν, ρ ισχύει $f(\mu) = g(\nu) = h(\rho)$ να αποδείξετε ότι a, b, c είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν οι μ, ν, ρ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου.

13. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις f με:

$$\alpha. f(x) = 2^x$$

$$\beta. f(x) = 2^{-x}$$

$$\gamma. f(x) = 2^{x+1}$$

$$\delta. f(x) = 2^{x-1}$$

$$\epsilon. f(x) = 2^x + 3$$

$$\sigma\tau. f(x) = 2^x - 3$$

$$\zeta. f(x) = 2^{x-2} + 5$$

$$\eta. f(x) = 2^{x+3} - 1$$

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{|x|}$

α . Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β . Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ . Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 3^{2-x}$.

δ . Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f .

15. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^x$ και $g(x) = x + 1$. Στη συνέχεια δικαιολογήστε την αλήθεια της πρότασης:

“Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x+1$ ” Πότε ισχύει $e^x = x+1$;

16. Να επιλυθεί η ανίσωση: $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$

17. Να λυθεί η ανίσωση: $(x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1$

18. Να λυθεί η εξίσωση: $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$

19. Να λυθεί η εξίσωση: $27^{|x|} = 3^{|x+1|+|x-1|}$

Ε

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

1. Να λυθεί η εξίσωση: $2^x + 2^{-x} = 2 \operatorname{syn}\left(\frac{5x}{x+1}\right)$

(Απ.: $x = 0$)

2. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3^{xy-y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

(Απ.: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ $(x_2, y_2) = (4, 2)$)

3. Να λυθεί η εξίσωση: $5^2 \cdot 5^4 \dots 5^{2x} = (0,04)^{-28}, x > 0$

(Απ.: $x = 7$)

4. Να λύσετε την ανίσωση $a^{x^2-1} \leq 1, a > 0$.

(Υπ.: Διακρίνετε περιπτώσεις για το a)

ΔΑΡΑΣ