

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η έννοια του λογάριθμου

Έστω η εξίσωση $a^x = \theta$, $1 \neq a > 0$, $\theta > 0$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Την μοναδική αυτή λύση την συμβολίζουμε με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ**

ως προς βάση το a . Είναι δηλαδή: $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$, $1 \neq a > 0$, $\theta > 0$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής :

Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Παράδειγμα: $\log_3 81 = 4$ αφού $3^4 = 81$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5 \text{ αφού } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \text{ αφού } 10^{-3} = 0,001$$

• Από τον πιο πάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι αν $1 \neq a > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_a a^x = x$ και $a^{\log_a \theta} = \theta$.

• Αφού είναι $a^1 = a$ τότε $\log_a a = 1$

• Αφού είναι $a^0 = 1$ τότε $\log_a 1 = 0$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $1 \neq a > 0$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

$$1. \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$2. \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$3. \log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$$

Παρατήρηση 1

Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[n]{\theta} = \theta^{\frac{1}{n}}$ έχουμε : $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a \theta$.

Παρατήρηση 2

Η ιδιότητα 1 ισχύει γενικά για n θετικούς αριθμούς $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Δηλαδή: $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \cdots + \log_a \theta_n$

Παρατήρηση 3

Από την ιδιότητα 2 προκύπτει ότι: $\log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta$.

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι.

Είναι δηλαδή $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta, \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής :

1. $\log 10^x = x$ και $10^{\log \theta} = \theta$
2. $\log 10 = 1$ και $\log 1 = 0$
3. $\log (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$
4. $\log \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log \theta_1 - \log \theta_2$
5. $\log \theta^k = k \cdot \log \theta$
6. $\log \sqrt[n]{\theta} = \log \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log \theta$ όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$.

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e . Οι λογάριθμοι αυτοί ονομάζονται **φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι**.

Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ , συμβολίζεται με $\ln \theta$ και όχι με $\log_e \theta$.

Είναι δηλαδή: $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta, \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής:

1. $\ln e^x = x$ και $e^{\ln \theta} = \theta$
2. $\ln e = 1$ και $\ln 1 = 0$
3. $\ln (\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$
4. $\ln \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$

$$5. \ln \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \ln \theta$$

$$6. \ln \sqrt[n]{\theta} = \ln \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \theta \text{ όπου } \theta_1, \theta_2, \theta > 0 \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

Αλλαγή Βάσης

Αν $1 \neq \alpha > 0$ και $1 \neq \beta > 0$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$

Παρατήρηση 4

$$\text{Είναι } \log \theta = \frac{\ln \theta}{\ln 10} \text{ και } \ln \theta = \frac{\log \theta}{\log e}$$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Στις ασκήσεις όπου ζητείται να υπολογίσουμε ένα λογάριθμο ενός αριθμού ή τη βάση ενός λογαρίθμου χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Παράδειγμα 1

α. Να υπολογίσετε το x από την ισότητα: $\log_8 x = -\frac{1}{2}$

β. Να υπολογίσετε την βάση a με $1 \neq a > 0$ από την ισότητα: $\log_a \frac{16}{25} = 2$

γ. Να υπολογίσετε τον $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

Λύση

$$\alpha. \text{Είναι: } \log_8 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 8^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta. \text{Είναι: } \log_a \frac{16}{25} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$\gamma. \text{Είναι } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να υπολογίσουμε παράσταση με λογάριθμους εφαρμόζουμε τις ιδιότητες τους καθώς και τον τύπο αλλαγής βάσης.

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι : $\frac{1}{2} \log 49 + \frac{1}{3} \log 27 + \frac{1}{4} \log 81 = \log 63$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{1}{2} \log 49 + \frac{1}{3} \log 27 + \frac{1}{4} \log 81 &= \log 49^{\frac{1}{2}} + \log 27^{\frac{1}{3}} + \log 81^{\frac{1}{4}} \\ &= \log \sqrt{49} + \log \sqrt[3]{27} + \log \sqrt[4]{81} = \log 7 + \log 3 + \log 3 = \log (7 \cdot 3 \cdot 3) = \log 63 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Να δειχθεί ότι: $\frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = 1 + \log_a \beta$

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = \frac{\log_a \theta}{\frac{\log_a \theta}{\log_a (a \cdot \beta)}} = \log_a (a \cdot \beta) = \log_a a + \log_a \beta = 1 + \log_a \beta$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Στις ασκήσεις που μας ζητούν να βρούμε αν έχει έννοια πραγματικού ένας λογάριθμος χρησιμοποιούμε τον ορισμό του λογαρίθμου με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Δηλαδή η παράσταση $\log_a \theta$ ορίζεται όταν $1 \neq a > 0$ και $\theta > 0$

Παράδειγμα 5

Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση: $\log_{2x} (2x^2 - 3x + 1)$

Λύση

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τους αριθμούς: α. $\log 100$, β. $\log_2 32$, γ. $\log_{\frac{1}{2}} 64$, δ. $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

Λύση

Είναι:

$$\alpha. \log 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\beta. \log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{2}} 64 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 64 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^6 \Leftrightarrow x = -6$$

$$\delta. \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

$$\alpha. \log 0,001$$

$$\beta. \log_{\sqrt{3}} 81$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$$

$$\delta. \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{32}{243}}$$

Λύση

$$\alpha. \log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$$

$$\beta. \log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8 = 8$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125} = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5^3} = \log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\delta. \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{32}{243}} = \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{\log_2 32 - 2\log_{0,1} 0,01 + 3\log 0,0001}{\log_3 \frac{1}{81} + 3\log_5 \sqrt{5} - 4\log_6 216}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A &= \frac{\log_2 32 - 2\log_{0,1} 0,01 + 3\log 0,0001}{\log_3 \frac{1}{81} + 3\log_5 \sqrt{5} - 4\log_6 216} = \frac{\log_2 2^5 - 2\log_{0,1} (0,1)^2 + 3\log 10^{-4}}{\log_3 3^{-4} + 3\log_5 5^{\frac{1}{2}} - 4\log_6 6^3} = \\ &= \frac{5 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)}{-4 + \frac{3}{2} - 4 \cdot 3} = \frac{5 - 4 - 12}{-4 + \frac{3}{2} - 12} = \frac{-11}{\frac{-29}{2}} = \frac{22}{29} \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Ναδειχθεί ότι:

α. $\log 3 + \log 20 - \log 6 = 1$

β. $\ln 3e - \ln 12 + \ln 4 = 1$

γ. $3 + 2\log_3 2 - \log_3 54 = \frac{1}{2} \log_3 4$

Λύση

α. $\log 3 + \log 20 - \log 6 = \log (3 \cdot 20) - \log 6 = \log 60 - \log 6 = \log \frac{60}{6} = \log 10 = 1$

β. $\ln 3e - \ln 12 + \ln 4 = \ln 3e + \ln 4 - \ln 12 = \ln (3e \cdot 4) - \ln 12 = \ln 12e - \ln 12 = \ln \frac{12e}{12} = \ln e = 1$

$$\begin{aligned} \gamma. \quad 3 + 2\log_3 2 - \log_3 54 &= 3\log_3 3 + \log_3 2^2 - \log_3 54 = \\ &= \log_3 3^3 + \log_3 4 - \log_3 54 = \log_3 27 + \log_3 4 - \log_3 54 = \\ &= \log_3 (27 \cdot 4) - \log_3 54 = \log_3 108 - \log_3 54 = \log_3 \frac{108}{54} = \log_3 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_3 2 = \frac{1}{2} \log_3 2^2 = \frac{1}{2} \log_3 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν ισχύει $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$, ναδειχθεί ότι $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$ ($x, y, z > 0$, $x \neq y \neq z \neq x$).

Λύση

Θέτουμε $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$ και έχουμε:

$$\frac{\log x}{y-z} = k \Leftrightarrow \log x = k \cdot (y-z) \Leftrightarrow x \log x = x \cdot k \cdot (y-z) \quad (1)$$

$$\frac{\log y}{z-x} = k \Leftrightarrow \log y = k \cdot (z-x) \Leftrightarrow y \cdot \log y = y \cdot k \cdot (z-x) \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{\log z}{x-y} = k \Leftrightarrow \log z = k \cdot (x-y) \Leftrightarrow z \cdot \log z = z \cdot k \cdot (x-y) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη έχουμε:

$$x \cdot \log x + y \cdot \log y + z \cdot \log z = x \cdot k \cdot (y-z) + y \cdot k \cdot (z-x) + z \cdot k \cdot (x-y) \Leftrightarrow$$

$$\log(x^x \cdot y^y \cdot z^z) = 0 \Leftrightarrow x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$$

Άσκηση 6

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\log \frac{2\alpha^4 \cdot \sqrt[5]{\beta^3 \cdot \gamma^2}}{4\beta^3 \sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^3}}$

Λύση

$$\begin{aligned} \log \frac{2\alpha^4 \cdot \sqrt[5]{\beta^3 \cdot \gamma^2}}{4\beta^3 \sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^3}} &= \log \frac{2\alpha^4 \cdot \beta^{\frac{3}{5}} \cdot \gamma^{\frac{2}{5}}}{4\beta^3 \cdot \alpha^{\frac{2}{4}} \cdot \beta^{\frac{1}{4}} \cdot \gamma^{\frac{3}{4}}} = \log \left(\frac{1}{2} \alpha^{4-\frac{2}{4}} \cdot \beta^{\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-3} \cdot \gamma^{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}} \right) = \\ &= \log \left(\frac{1}{2} \alpha^{\frac{7}{2}} \cdot \beta^{\frac{7}{20}} \cdot \gamma^{-\frac{7}{20}} \right) = \log \frac{1}{2} + \log \alpha^{\frac{7}{2}} + \log \beta^{\frac{7}{20}} + \log \gamma^{-\frac{7}{20}} = \\ &= \log 1 - \log 2 + \frac{7}{2} \log \alpha + \frac{7}{20} \log \beta - \frac{7}{20} \log \gamma = -\log 2 + \frac{7}{2} \log \alpha + \frac{7}{20} \log \beta - \frac{7}{20} \log \gamma \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστούν οι αριθμοί: **α.** $10^{2-3\log 2}$ **β.** $e^{2-\ln 5}$ **γ.** $3^{\log_{3\sqrt{3}} 8}$

Λύση

$$\text{α. } 10^{2-3\log 2} = 10^2 \cdot 10^{-3\log 2} = 100 \cdot 10^{\log 2^{-3}} = 100 \cdot 2^{-3} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$\text{β. } e^{2-\ln 5} = e^2 \cdot e^{-\ln 5} = e^2 \cdot e^{\ln 5^{-1}} = e^2 \cdot 5^{-1} = \frac{e^2}{5}$$

$$\text{γ. } 3^{\log_{3\sqrt{3}} 8} = \left((3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \right)^{\log_{3\sqrt{3}} 8} = (3\sqrt{3})^{\log_{3\sqrt{3}} 8^{\frac{2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$$

Άσκηση 8

Αν $\log_2 k = k$ να υπολογίσετε τους αριθμούς: **α.** $\log_2 10$ και **β.** $\log_{16} 40$

Λύση

$$\alpha. \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{k}$$

$$\beta. \log_{16} 40 = \frac{\log 40}{\log 16} = \frac{\log 4 + \log 10}{\log 2^4} = \frac{2\log 2 + 1}{4\log 2} = \frac{2k+1}{4k}$$

Άσκηση 9

Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$ να δείχθεί ότι: $\ln \alpha + \ln \beta = 2\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{9} = \alpha\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \ln(\alpha\beta) \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) = \ln \alpha + \ln \beta \end{aligned}$$

Άσκηση 10

Να λυθούν οι εξισώσεις: $\alpha. 2^x = 5$ $\beta. 3^{2-5x} = 7$

Λύση

$$\alpha. 2^x = 5 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad (\text{ή } 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5)$$

$$\begin{aligned} \beta. 3^{2-5x} = 7 &\Leftrightarrow \log 3^{2-5x} = \log 7 \Leftrightarrow (2-5x) \log 3 = \log 7 \Leftrightarrow 2 \log 3 - 5x \log 3 = \log 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x \log 3 = 2 \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow 5x \log 3 = \log 9 - \log 7 \Leftrightarrow 5x \log 3 = \log \frac{9}{7} \Leftrightarrow x = \frac{\log \frac{9}{7}}{5 \log 3} \end{aligned}$$

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι: $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln 2, k \in \mathbb{N}^*$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \\ = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k}\right) = \\ = \ln\left(\frac{k+1}{2}\right) &= \ln(k+1) - \ln 2 \end{aligned}$$

Άσκηση 12

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$ με $\alpha, \beta, \gamma, x \neq 1$ ισχύει :

$$\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x + \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x + \log_{\gamma} x \cdot \log_{\alpha} x = \frac{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x}{\log_{\alpha\beta\gamma} x}$$

Λύση

$$\text{Είναι } \log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x + \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x + \log_{\gamma} x \cdot \log_{\alpha} x =$$

$$\log_{\alpha} x \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} + \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma} + \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma} \cdot \log_{\alpha} x =$$

$$(\log_{\alpha} x)^2 \cdot \left(\frac{1}{\log_{\alpha} \beta} + \frac{1}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} + \frac{1}{\log_{\alpha} \gamma} \right) =$$

$$(\log_{\alpha} x)^2 \left(\frac{\log_{\alpha} \gamma + \log_{\alpha} \alpha + \log_{\alpha} \beta}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \right) = (\log_{\alpha} x)^2 \cdot \frac{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \frac{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x}{\log_{\alpha\beta\gamma} x} = \frac{\log_{\alpha} x \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma}}{\frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}} =$$

$$\frac{(\log_{\alpha} x)^3 \cdot \log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} = (\log_{\alpha} x)^2 \cdot \frac{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \quad (2)$$

Από την (1) και την (2) ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση 13

Να υπολογιστεί ο αριθμός: $\kappa = 27^{\frac{1}{6 \log_2 3}}$

Λύση

$$\text{Είναι: } \kappa = 27^{\frac{1}{6 \log_2 3}} = 27^{\frac{\log_2 2}{6 \log_2 3}} = 27^{\frac{1}{6} \log_3 2} = 3^{\frac{3}{6} \log_3 2} = 3^{\frac{1}{2} \log_3 2} = 3^{\log_3 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Άσκηση 14

Σε μια αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = \ell n 2$ και $\alpha_2 = \ell n 16$ να δειχθεί ότι το άθροισμα των n

$$\text{πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο: } S_n = \frac{n(3n-1)}{2} \cdot \ell n 2$$

Λύση

Η διαφορά ω της προόδου είναι: $\omega = \ell n 16 - \ell n 2 = \ell n 2^4 - \ell n 2 = 4 \ell n 2 - \ell n 2 = 3 \ell n 2$

Οπότε έχουμε: $S_v = \left[2 \cdot \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega \right] \cdot \frac{v}{2} = \left[2 \cdot \ell n 2 + (v-1) \cdot 3 \ell n 2 \right] \cdot \frac{v}{2} =$

$$(2 \cdot \ell n 2 + 3v \cdot \ell n 2 - 3 \cdot \ell n 2) \cdot \frac{v}{2} = (3v \cdot \ell n 2 - \ell n 2) \cdot \frac{v}{2} =$$

$$= (3v-1) \cdot \ell n 2 \cdot \frac{v}{2} = \frac{v(3v-1)}{2} \cdot \ell n 2$$

Άσκηση 15

Αν $\ell n I_0 = -\frac{R \cdot t}{L} + \ell n I$ να δειχθεί ότι: $I_0 = I \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}$

Λύση

$$\text{Είναι } \ell n I_0 = -\frac{R \cdot t}{L} + \ell n I \Leftrightarrow \ell n I_0 - \ell n I = -\frac{R \cdot t}{L} \Leftrightarrow \ell n \frac{I_0}{I} = -\frac{R \cdot t}{L} \Leftrightarrow \frac{I_0}{I} = e^{\frac{-R \cdot t}{L}} \Leftrightarrow$$

$$I_0 = I \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}$$

Άσκηση 16

Το ραδιενεργό ιώδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού περίπου 7 ημέρες. Αν είναι Q_0 η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου, τότε η ποσότητα που έχει απομείνει μετά από t ημέρες δίνεται από την σχέση: $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$.

α. Να βρεθεί η σταθερά k . (Δίνεται ότι: $\frac{\ell n 2}{7} \approx 0,1$)

β. Για $Q_0 = 1000 \text{ gr}$, να βρείτε σε πόσες ημέρες θα έχουν μείνει 5gr ραδιενεργού ιωδίου.

Λύση

α. Μετά από 7 ημέρες θα έχει απομείνει η μισή ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου.

Επομένως για $t = 7$ και για $Q(7) = \frac{Q_0}{2}$ η σχέση $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$ γίνεται:

$$Q(7) = Q_0 e^{-k \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-7k} \Leftrightarrow e^{-7k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ell n e^{-7k} = \ell n \frac{1}{2} \Leftrightarrow -7k = \ell n 1 - \ell n 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7k = -\ell n 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ell n 2}{7} \Leftrightarrow k \approx 0,1$$

β. Για $Q(t) = 5$, $Q_0 = 1000$ και $k = 0,1$ η σχέση $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$ γίνεται:

$$5 = 1000 e^{-0,1t} \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{200} \Leftrightarrow \ell n e^{-0,1t} = \ell n \frac{1}{200} \Leftrightarrow -0,1t = -\ell n 200 \Leftrightarrow t = \frac{\ell n 200}{0,1}$$

Άσκηση 17

Όταν το φως του ήλιου περνάει μέσα από ένα γυαλί ενός παραθύρου, η έντασή του μειώνεται

σύμφωνα με τη σχέση $E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{50}}$, όπου E_0 η ένταση που έχει το ηλιακό φως όταν πέφτει στο γυαλί και x το πάχος του γυαλιού σε mm.

α. Πόση θα είναι η ένταση του φωτός όταν περάσει από ένα γυαλί που έχει πάχος 5 mm ;

β. Ποιο το πάχος ενός γυαλιού ώστε η ένταση του φωτός που το περνά να είναι ίση με το 60% της αρχικής τιμής;

(Δίνεται: $\ln 3 = 1,01$, $\ln 5 = 1,60$)

Λύση

Είναι:

α. Η $E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{50}}$ για $x = 5$ γίνεται: $E(5) = E_0 e^{-\frac{5}{50}} \Leftrightarrow E(5) = E_0 e^{-0,1}$

β. Έχουμε ότι $E(x) = 0,6E_0$. Άρα:

$$0,6E_0 = E_0 e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow 0,6 = e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow \ln 0,6 = \ln e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln \frac{6}{10} \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln 3 - \ln 5 \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = 1,01 - 1,60 \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = -0,59 \Leftrightarrow x = 29,5 \text{ mm}$$

Α.**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i. $\log_{\frac{1}{3}} 27$

ii. $\log_{\sqrt{2}} 64$

iii. $\log_{25} \frac{1}{5}$

(Απ.: i. -3, ii. 10, iii. -1/2)

2. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω ισότητες:

i. $\log_3 x = -\frac{1}{2}$

ii. $\log_2 (x+2) = 3$

iii. $\log (2x-5) = 2$

iv. $\ln 3x = 5$

(Απ.: i. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ii. $x = \frac{17}{8}$, iii. $x = 52,5$, iv. $x = \frac{e^5}{3}$)

3. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\log_x 8 = \frac{2}{3}$

ii. $\log_x \frac{1}{9} = -2$

iii. $\log_x 0,01 = -\frac{1}{2}$

(Απ.: i. $x = 16\sqrt{2}$, ii. $x = 3$, iii. $x = 10.000$)

4. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\log_3 \sqrt{x^2} = -1$

ii. $\log_{x^{-3}} 64 = -2$

(Απ.: i. $x = \pm \frac{1}{3}$, ii. $x = 2$)

5. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i. $\log_3 \sqrt[3]{0,0001}$

ii. $\ln \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{e^3}}$

(Απ.: i. $-\frac{4}{3}$, ii. $-\frac{7}{2}$)

6. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i. $\log_4 \sin \frac{\pi}{3}$

ii. $\log_{\pi} \eta \mu \frac{\pi}{2}$

iii. $\log_{\sqrt{3}} \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6}$

(Απ.: i. $-\frac{1}{2}$, ii. 0, iii. -1)

7. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \eta \mu x = 2$

ii. $\log_{\sqrt{3}} \varepsilon \varphi 2x = -1$

(Απ.: i. $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$, ii. $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$)

8. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i. $\frac{1}{2} \log 81 + \frac{1}{3} \log 125 - \frac{1}{5} \log 243$

ii. $2 + 3 \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 9$

(Απ.: i. $1 + \log 5$, ii. $2 + \ln 8$)

9. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

i. $2 \log 4 + \log 3 - \log 12 = 2 \log 2$

ii. $\frac{1}{2} \ln 16 + \frac{1}{3} \ln 27 + \frac{1}{5} \ln 32 - \frac{1}{4} \ln 64 = \frac{3}{2} \ln 2 + \ln 3$

(Υπ.: Εφαρμόστε τις ιδιότητες των λογαρίθμων)

10. Να δειχθεί ότι: $\log_2 3 \cdot \log_5 7 = \log_5 3 \cdot \log_2 7$

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

11. Να εφαρμοστούν όλες οι δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{e^2y^4\sqrt[4]{xy}}\right)$

ii. $\log\left(\frac{3x^2\sqrt[5]{y^3z^2}}{4y^2\sqrt[3]{x^3z^2}}\right)$

iii. $\ln\left(2x \cdot \frac{\sqrt{x^2y^3z}}{\sqrt[3]{x \cdot z}}\right)$

(Απ.: i. $\frac{7}{4}\ln x - \frac{3}{4}\ln y - 2$, ii. $\log x - \frac{7}{5}\log y - \frac{4}{15}\log 2 + \log 3 - \log 4$,

iii. $\frac{5}{3}\log x + \frac{3}{2}\log y + \frac{1}{6}\log 2 + \log 2$)

12. Αν $\log x = \alpha$ και $\log y = \beta$ να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \log \sqrt[3]{x\sqrt{x^3y}}$
(Απ.: $A = \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{6}\beta$)

13. Αν $\ln x = \kappa$ και $\ln y = \lambda$ να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \ln \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^3y}}$
(Απ.: $A = -\frac{4}{15}\kappa + \frac{7}{15}\lambda$)

14. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \ln \frac{\sqrt[3]{e^2\sqrt{e}} \cdot \sqrt[7]{e}}{\sqrt[9]{e^5}}$
(Απ.: $A = \frac{211}{252}$)

15. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \log \frac{\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}{\sqrt[6]{x\sqrt{x^3\sqrt{x}}}}$ αν $\log x = 3$.
(Απ.: $A = -\frac{11}{40}$)

16. Να υπολογιστούν οι αριθμοί:

i. $e^{3-2\ln 2}$

ii. $10^{5-\frac{1}{2}\log 16}$

iii. $5^{2-\log_5 7}$

(Απ.: i. $\frac{e^3}{4}$, ii. $\frac{10^5}{4}$, iii. $\frac{25}{7}$)

17. Να υπολογιστούν οι αριθμοί: $\alpha = 9^{\log_{\sqrt{5}} 2}$ και $\beta = \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 3}$
(Απ.: $\alpha = 16$, $\beta = \frac{1}{81}$)

18. Να υπολογιστεί ο αριθμός: $\alpha = 5^{3+\frac{2}{\log 5}}$

(Απ.: $\alpha = 12.500$)

19. Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι αριθμοί:

i. $\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$

ii. $\log(x^2 - x - 2)$

iii. $\log_{x+1}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)$

(Απ.: i. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, ii. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, iii. $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$)

20. Για ποιες τιμές του x έχουν νόημα οι παραστάσεις:

i. $\log[x(x^2 - 2)]$

ii. $\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\right)$

(Απ.: i. $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, ii. $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$)

21. Για ποιες τιμές του x έχουν νόημα οι παραστάσεις:

i. $A = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}$

ii. $B = \ln(x^2 - 3x + 2) - \ln(x^2 - x)$

Για ποιες τιμές του x είναι $A = B$;

(Απ.: i. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, ii. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$)

22. Για ποιες τιμές του α έχει νόημα η παράσταση: $A = \log_{2\alpha^2 - 3\alpha + 1} x$

(Απ.: $\alpha \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$)

23. Σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι: $a_1 = \log 2$ και ο δεύτερος είναι

$a_2 = \log 8$. Ναδειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων της όρων δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot \log 2$$

(Υπ.: $\lambda = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$)

24. Αν $\beta = \frac{1}{2}(10^x - 10^{-x})$ ναδειχθεί ότι: $x = \log(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$

(Υπ.: Να θέσετε $10^x = y$ και μετά να βρείτε το y και να λογαριθμήσετε)

25. Δίνεται η $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$. Να υπολογιστούν οι τιμές: $f(-\ln 2)$ και $f(\ln 2)$

$$(A\pi.: f(-\ln 2) = -\frac{5}{3}, f(\ln 2) = \frac{5}{3})$$

26. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $12(\alpha^3 - \beta^3) = \alpha\beta(36\alpha - 36\beta + 1)$ να δειχθεί ότι:

$$\log(\alpha - \beta) + \log \sqrt[3]{12} = \frac{1}{3}(\log \alpha + \log \beta)$$

$$(Y\pi.: \text{Να δείξετε ότι } 12(\alpha - \beta)^3 = \alpha \cdot \beta)$$

27. Να δειχθεί ότι: $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\gamma} \delta = \log_{\gamma} \beta \cdot \log_{\alpha} \delta$, $\delta, \beta, \delta > 0$ και $1 \neq \alpha, \gamma > 0$

(Yπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

28. Να δειχθεί ότι: $3\log(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 4\log(5 + 2\sqrt{6}) = 5\log(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$$(Y\pi.: \text{Είναι } 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2)$$

29. Αν $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$ και $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$ να δειχθεί ότι: $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ όπου $10 \neq x, y, z > 0$.

$$(Y\pi.: \text{Είναι } \frac{1}{1-\log x} = \log y, \frac{1}{1-\log y} = \log z)$$

30. Να δειχθεί ότι: $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdots \log_{a_n} a_1 = 1$

(Yπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

31. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ και $x = \log_{\alpha} \beta$, $y = 2\log_{\beta} \gamma$, $z = 3\log_{\gamma} \alpha$.

$$\text{Να δειχθεί ότι: } \alpha^{x-3}\beta^{y-1}\gamma^{z-2} = 1$$

$$(Y\pi.: \text{Είναι } \alpha^x = \beta, \beta^y = \gamma^2, \gamma^z = \alpha^3)$$

32. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \ln\left(\ln\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)$

$$(A\pi.: A = \ln 7 - \ln 8 + \ln(\ln 2))$$

33. Αν $\log 2 = \alpha$ και $\log 3 = \beta$ να υπολογιστούν συναρτήσει των α, β ο λογάριθμος: $\log_{36} \sqrt{48}$

$$(A\pi.: \frac{\beta + 8\alpha}{2(\alpha + \beta)})$$

34. Να υπολογιστεί η παράσταση : $A = \log_{\epsilon} 1^0 + \log_{\epsilon} 2^0 + \dots + \log_{\epsilon} 89^0$

(Απ.: $A = 0$)

35. Αν $\log_{\beta} \alpha = \log_{\alpha} \beta$, $0 < \alpha, \beta \neq 1$, $\alpha \neq \beta$ να δειχθεί ότι : $\alpha \cdot \beta = 1$

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

36. Αν $0 < x, \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ να δειχθεί ότι:

$$\left(\frac{1}{\log_{\alpha} x} \right)^3 + \left(\frac{1}{\log_{\beta} x} \right)^3 + \left(\frac{1}{\log_{\gamma} x} \right)^3 = \frac{3}{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta = \gamma$$

37. Να δειχθεί ότι : $\log_{\alpha^k} \beta = \frac{1}{k} \log_{\alpha} \beta$, $k \neq 0$, $0 < \alpha \neq 1$, $\beta > 0$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η παράσταση $(y^a)^{-\beta \log_{y^v} \mu^p}$, $\mu^p > 0$, $0 < y^v \neq 1$.

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

38. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και $x = \log_{\alpha} (\beta\gamma)$, $y = \log_{\beta} (\gamma\alpha)$, $z = \log_{\gamma} (\alpha\beta)$ να δειχθεί ότι:

$$\alpha^{x-2} \cdot \beta^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$$

(Υπ.: Είναι $\alpha^x = \gamma$, $\beta^y = \gamma\alpha$, $\gamma^z = \alpha \cdot \beta$)

39. Να δειχθεί ότι: $\ln x + 2 \ln x^2 + 3 \ln x^3 + \dots + k \ln x^k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \ln x$

(Υπ.: Είναι $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + v^v = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$)

40. Να δειχθεί ότι: $\alpha^{\frac{\log(\log \alpha)}{\log \alpha}} = \log \alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

(Υπ.: $\alpha^{\frac{\log(\log \alpha)}{\log \alpha}} = \alpha^{a \log(\log \alpha) / \log_{\alpha} 10}$)

E

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Να βρείτε την τιμή του x που αληθεύει την $\log_{3-x} (x^2 + 6x + 9) + \log_{3+x} (x^2 - 6x + 9) = 4$

(Απ.: $x = 0$)