

# ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

# Περιεχόμενα

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| Μάθημα 1 <sup>ο</sup> : Γραμμικά συστήματα .....    | 5  |
| Μάθημα 2 <sup>ο</sup> : Μή γραμμικά συστήματα ..... | 67 |

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Μάθημα 3 <sup>ο</sup> : Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης ..... | 79  |
| Μάθημα 4 <sup>ο</sup> : Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης .....   | 105 |

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Μάθημα 5 <sup>ο</sup> : Τριγωνομετρικοί αριθμοί .....                                  | 111 |
| Μάθημα 6 <sup>ο</sup> : Τριγωνομετρικές συναρτήσεις<br>Τριγωνομετρικές εξισώσεις ..... | 139 |
| Μάθημα 7 <sup>ο</sup> : Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών .....               | 155 |
| Μάθημα 8 <sup>ο</sup> : Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2\alpha$ .....             | 165 |

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Μάθημα 9 <sup>ο</sup> : Πολυώνυμα - Διαίρεση πολυωνύμων .....                                    | 173 |
| Μάθημα 10 <sup>ο</sup> : Πολυωνυμικές εξισώσεις<br>Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές ..... | 191 |

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Μάθημα 11 <sup>ο</sup> : Εκθετική συνάρτηση .....    | 207 |
| Μάθημα 12 <sup>ο</sup> : Λογάριθμοι .....            | 225 |
| Μάθημα 13 <sup>ο</sup> : Λογαριθμική συνάρτηση ..... | 241 |

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| Επαναληπτικά - Συνδυαστικά Θέματα ..... | 259 |
|-----------------------------------------|-----|

# 1ο Κεφάλαιο

# Μάθημα 1

## Γραμμικά συστήματα

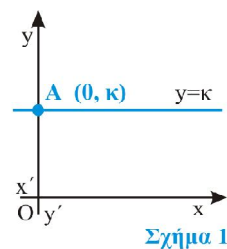
### Θεωρία 1.

- α) Τί ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τί ονομάζουμε λύση της;
- β) Τί παριστάνει γραφικά η εξίσωση:  $y = k$
- γ) Τί παριστάνει γραφικά η εξίσωση:  $x = k$
- δ) Δείξτε ότι η γραμμική εξίσωση  $ax + by = \gamma$  με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία.

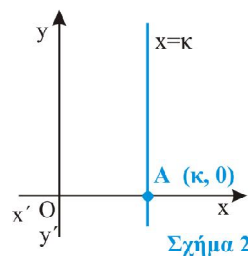
#### Απάντηση:

α) Κάθε εξίσωση της μορφής  $ax + by = \gamma$  λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους. Λύση της ονομάζουμε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

β) Η εξίσωση  $y = k$  παριστάνει γραφικά μία ευθεία παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(0, k)$   
(Σχήμα 1)



γ) Η εξίσωση  $x = k$  παριστάνει γραφικά μια ευθεία παράλληλη στον άξονα  $y'y$  και η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(k, 0)$  (Σχήμα 2)



#### Σημείωση:

Η ευθεία  $x = k$  δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

δ) Θα δείξουμε ότι η εξίσωση  $ax + by = \gamma$  (1) με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

#### 1<sup>η</sup> περίπτωση

Έστω  $a = 0$  και  $b \neq 0$ . Τότε η (1) γίνεται:

$$0x + by = \gamma \Leftrightarrow by = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma}{b}$$

που παριστάνει ευθεία **παράλληλη στον**  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $A(0, \frac{\gamma}{\beta})$

### 2<sup>η</sup> περίπτωση

Έστω  $\alpha \neq 0$  και  $\beta = 0$ . Τότε η (1) γίνεται:

$\alpha x + 0y = \gamma \Leftrightarrow \alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}$  που παριστάνει ευθεία **παράλληλη στον**  $y'y$  και

διέρχεται από το σημείο  $A(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$

### 3<sup>η</sup> περίπτωση

Έστω  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  τότε από (1) έχουμε:  $\beta y = -\alpha x + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$  που παριστάνει ευθεία.

## Θεωρία 2.

- α) Τί ονομάζουμε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους;
- β) Τί ονομάζουμε λύση ενός συστήματος και τί επίλυση ενός συστήματος;
- γ) Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά η μοναδική λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων;
- δ) Τί σημαίνει κάνουμε επαλήθευση του συστήματος;
- ε) Με ποιες μεθόδους μπορεί να λυθεί ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους;

### Απάντηση:

α) Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε σύστημα

της μορφής: 
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

β) Λύση ενός συστήματος ονομάζεται κάθε ζεύγος  $(x, y)$  πραγματικών αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος. **Επίλυση** ενός συστήματος ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης του συνόλου των λύσεων του συστήματος

γ) Η **μοναδική λύση** ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις του συστήματος.

δ) Κάνουμε **επαλήθευση** του συστήματος σημαίνει ότι ελέγχουμε αν οι λύσεις του συστήματος που βρήκαμε επαληθεύουν τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος.

ε) Μπορεί να λυθεί με τις εξής μεθόδους:

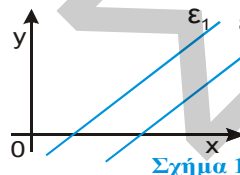
- 1) Μέθοδος της **αντικατάστασης** (γνωστή από το Γυμνάσιο).
- 2) Μέθοδος των **αντίθετων συντελεστών** ή της **απαλοιφής** (γνωστή από το Γυμνάσιο).
- 3) Μέθοδος της **σύγκρισης** (δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).
- 4) Μέθοδος των **οριζουσών** ή **μέθοδος Cramer** (θα τη δούμε παρακάτω).

### Θεωρία 3.

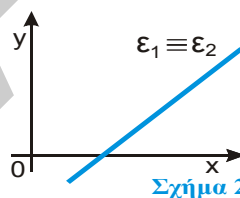
- α) Πότε ένα σύστημα λέγεται αδύνατο και πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά;  
 β) Πότε ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ή είναι αόριστο) και πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά;

#### Απάντηση:

- α) Ένα σύστημα λέγεται αδύνατο όταν δεν υπάρχουν τιμές των  $x, y$  που να το επαληθεύουν. Όταν ένα σύστημα είναι αδύνατο γεωμετρικά σημαίνει ότι οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι μεταξύ τους παράλληλες. (Σχήμα 1)



- β) Λέμε ότι ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ή αλλιώς ότι είναι αόριστο) όταν υπάρχουν άπειρα ζεύγη  $(x, y)$  που το επαληθεύουν. Όταν ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις (δηλ. είναι αόριστο) γεωμετρικά σημαίνει ότι οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν. (Σχήμα 2)



### Θεωρία 4.

- α) Πότε δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα;  
 β) Με ποιους συνήθως τρόπους γίνεται η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του;  
 γ) Όταν έχουμε δύο εξισώσεις ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ) τί ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό των εξισώσεων ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ );

#### Απάντηση:

- α) Δύο συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.  
 β) Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμο του γίνεται συνήθως με έναν από τους δύο παρακάτω τρόπους.

#### 1ος τρόπος:

Λύνουμε τη μία εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.

#### 2ος τρόπος:

Αντικαθιστούμε μία από τις εξισώσεις ( $\epsilon_1$ ) ή ( $\epsilon_2$ ) του συστήματος π.χ. την ( $\epsilon_1$ ) με την εξίσωση  $\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2$  που προκύπτει, αν στα μέλη της ( $\epsilon_1$ ) πολλαπλασιασμένα με  $\lambda_1 \neq 0$  προσθέσουμε τα μέλη της ( $\epsilon_2$ ) πολλαπλασιασμένα με  $\lambda_2$ .

- γ) Η εξίσωση  $\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2$ , λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ).

## Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

### Παράδειγμα 1 (Σωστό-λάθος)

Απαντήστε με (Σ) αν είναι σωστό και με (Λ) αν είναι λάθος τα παρακάτω αιτιολογώντας τα.

α) Η εξίσωση  $(\lambda - 2)x + (\lambda + 3)y = 5$  παριστάνει πάντα ευθεία.

β) Το σύστημα 
$$\begin{cases} 3x + 5y^2 = 1 \\ 4\sqrt{x} + 5y = 7 \end{cases}$$
 είναι γραμμικό

γ) Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

#### Απάντηση:

α) Σ. Εάν δεν παρίστανε ευθεία θα έπρεπε οι συντελεστές των  $x$  και  $y$  να ήταν συγχρόνως μηδέν. Δηλαδή:  $\lambda - 2 = 0$  και  $\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$  και  $\lambda = -3$  αδύνατο. Άρα παριστάνει πάντα ευθεία.

β) Λ. Δεν είναι γραμμικό διότι οι άγνωστοι είναι της μορφής:  $y^2, \sqrt{x}$  αντί για  $x, y$ .

γ) Λ. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους θα έχει μοναδική λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση. Ποτέ όμως δύο ακριβώς λύσεις.

### Παράδειγμα 2 (συμπλήρωσης)

Συμπληρώστε τα παρακάτω

α) το σύστημα 
$$\begin{cases} 0x + 0y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$
 είναι ...

β) το σύστημα 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$
 είναι ...

#### Απάντηση:

α) Αδύνατο (διότι η πρώτη εξίσωση  $0x + 0y = 3 \Leftrightarrow 0 = 3$  είναι αδύνατη)

β) Αόριστο, διότι η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$4x + 6y = 10 \Leftrightarrow \frac{4x}{2} + \frac{6y}{2} = \frac{10}{2} \Leftrightarrow 2x + 3y = 5 \text{ που είναι ίδια με την πρώτη.}$$

**Παράδειγμα 3 (πολλαπλής επιλογής)**

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας την.

α) Η παράσταση  $A = |x - 2| + |2x + 3y - 2|$  γίνεται ελάχιστη όταν:

A)  $x = 2$  και  $y = 4$  B)  $x = -2$  και  $y = 1$  Γ)  $x = 2$  και  $y = -\frac{2}{3}$

β) Αν οι ευθείες  $y = 3x + 1$ ,  $y = -2x + k$  τέμνονται στο σημείο  $A(-1, -2)$  τότε το  $k$  είναι ίσο:

A)  $k = 4$ , B)  $k = -3$ , Γ)  $k = 5$ , Δ)  $k = -4$

**Απάντηση:**

α) Σωστό είναι το (Γ).

Διότι  $|x - 2| \geq 0$  και  $|2x + 3y - 2| \geq 0$ . Άρα η παράσταση  $A \geq 0$  και γίνεται ελάχιστη όταν  $A = 0 \Leftrightarrow |x - 2| + |2x + 3y - 2| = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 \\ \text{και} \\ |2x + 3y - 2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{και} \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ 2 \cdot 2 + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

β) Σωστό είναι το (Δ).

Διότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής  $A(-1, -2)$  επαληθεύουν το σύστημα, δηλαδή τις εξισώσεις των δύο ευθειών άρα και τη δεύτερη οπότε:

$$A(-1, -2) : y = -2x + k \Leftrightarrow -2 = -2(-1) + k \Leftrightarrow -2 = 2 + k \Leftrightarrow -k = 2 + 2 \Leftrightarrow -k = 4 \Leftrightarrow k = -4$$

**Παράδειγμα 4 (αντιστοίχισης)**

Για τους αριθμούς  $x, y \in \mathbb{R}^*$  αντιστοιχίστε τους αριθμούς της στήλης Α με τα γράμματα της στήλης Β αιτιολογώντας την αντιστοίχιση.

| Στήλη Α                                                                           | Στήλη Β                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1) Οι $x, y$ έχουν διαφορά 0 και πηλίκο 10                                        | α) $\begin{cases} x = y \\ y = 10x \end{cases}$          |
| 2) Τα $x, y$ είναι πλευρές τετραγώνου με εμβαδόν 40                               | β) $\begin{cases} y = 20 - x \\ 2y + 6 = x \end{cases}$  |
| 3) Οι $x, y$ έχουν άθροισμα 20 και ο $y$ είναι το μισό του $x$ ελαττωμένο κατά 3. | γ) $\begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 10 \end{cases}$      |
|                                                                                   | δ) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 - 40 = 0 \end{cases}$ |

**Απάντηση:**

$$(1) \leftrightarrow (\alpha), \quad (2) \leftrightarrow (\delta) \quad (3) \leftrightarrow (\beta)$$

**Αιτιολόγηση:**

$$(1) \begin{cases} x - y = 0 \\ \frac{y}{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 10x \end{cases} \quad (\alpha)$$

$$(2) \begin{cases} x = y \\ y^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 - 40 = 0 \end{cases} \quad (\delta)$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 20 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - x \\ 2y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 - x \\ 2y + 6 = x \end{cases} \quad (\beta)$$

**Παράδειγμα 5**

Να λύσετε το σύστημα (Σ)

$$\begin{cases} 2(x - 3) - 4(y + 1) = 3x - 1 & (1) \\ \frac{x - 1}{3} = 2 - \frac{2 + y}{4} & (2) \end{cases}$$

με την μέθοδο της σύγκρισης.

**Λύση:****Βήμα 1:**

Φέρνουμε πρώτα τις δύο εξισώσεις του συστήματος στην κανονική τους μορφή  $ax + by = \gamma$ . Δηλαδή κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών, παρενθέσεων, μεταφορά γνωστών από αγνώστων κλπ.

- Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 6 - 4y - 4 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x - 4y - 3x = -1 + 6 + 4 \Leftrightarrow -x - 4y = 9 \quad (3)$$

- Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 12 \frac{x-1}{3} = 12 \cdot 2 - 12 \frac{2+y}{4} \Leftrightarrow 4(x-1) = 24 - 3(2+y) \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 = 24 - 6 - 3y \Leftrightarrow 4x + 3y = 24 - 6 + 4 \Leftrightarrow 4x + 3y = 22 \quad (4) \end{aligned}$$

Από (3), (4) έχουμε το σύστημα: (Σ)  $\begin{cases} -x - 4y = 9 \\ 4x + 3y = 22 \end{cases}$

**Βήμα 2:**

Λύνουμε και τις δύο εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο. Εδώ επιλέγουμε τον  $x$  που έχει τους μικρότερους συντελεστές. Έτσι το (Σ) των (3) και (4) γίνεται :

$$(Σ) \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 9 + 4y \\ 4x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 - 4y & (5) \\ x = \frac{22 - 3y}{4} & (6) \end{cases}$$

**Βήμα 3:**

Συγκρίνοντας τα μέλη των (5) και (6) παρατηρούμε ότι τα πρώτα είναι ίσα άρα και τα δεύτερα. (Γι' αυτό λέγεται μέθοδος της σύγκρισης).

Έτσι λοιπόν από το (5) και (6) έχουμε:

$$\begin{aligned} -9 - 4y &= \frac{22 - 3y}{4} \Leftrightarrow -4 \cdot 9 - 4 \cdot 4y = 22 - 3y \Leftrightarrow -36 - 16y = 22 - 3y \Leftrightarrow -16y + 3y = 22 + 36 \Leftrightarrow -13y = 58 \Leftrightarrow y = -\frac{58}{13} \quad (7) \end{aligned}$$

**Βήμα 4:**

Το  $y = -\frac{58}{13}$  που βρήκαμε στην (7) το αντικαθιστούμε στην (5) και βρίσκουμε το  $x$ .

$$(5) \stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} x = -9 - 4\left(-\frac{58}{13}\right) \Leftrightarrow x = -9 + \frac{232}{13} \Leftrightarrow x = -\frac{117}{13} + \frac{232}{13} \Leftrightarrow x = \frac{115}{13} \quad (8)$$

Από (7) και (8) συμπεραίνουμε ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση, την:

$$(x, y) = \left( \frac{115}{13}, -\frac{58}{13} \right)$$

**Παραδείγμα 6**

Να λυθεί το (Σ) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$(\Sigma) \begin{cases} -301x + 36y = 7 & (1) \\ 903x - 108y = 40 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

Παρατηρούμε ότι το 903 είναι τριπλάσιο από το 301. Δηλαδή:  $903 = 3 \cdot 301$ .

Άρα αν πολλαπλασιάσουμε την (1) με 3 και την (2) με 1 ο άγνωστος  $y$  στις δύο εξισώσεις θα έχει αντίθετους συντελεστές.

Δηλαδή βρίσκουμε το ΕΚΠ  $(301, 903) = 903$  και πολλαπλασιάζουμε τις δύο εξισώσεις την πρώτη με το  $903 : 301 = 3$  και την δεύτερη με το  $903 : 903 = 1$ .

Έτσι το (Σ) γίνεται:

$$\begin{cases} -301x + 36y = 7 \\ 903x - 108y = 40 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -903x + 108y = 21 \\ 903x - 108y = 40 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{matrix} 0 = 61 \end{matrix} \text{ αδύνατο.} \quad \text{Άρα το (Σ) είναι αδύνατο.}$$

**Παράδειγμα 7**

Να λυθεί το (Σ) με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y = 7 & (1) \\ -4x + 6y = -14 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(1) \Leftrightarrow 2x = 7 + 3y \Leftrightarrow x = \frac{7 + 3y}{2} \quad (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} -4 \cdot \frac{7 + 3y}{2} + 6y = -14 \Leftrightarrow -2(7 + 3y) + 6y = -14 \Leftrightarrow -14 - 6y + 6y = -14$$

$$\Leftrightarrow -6y + 6y = -14 + 14 \Leftrightarrow 0y = 0 \text{ αόριστη.}$$

Άρα και το σύστημα είναι αόριστο δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και θα βρούμε.

Από την (3) έχουμε:

$$x = \frac{7 + 3y}{2} \quad \text{Άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής:}$$

$$(x, y) = \left( \frac{7 + 3y}{2}, y \right), \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{ελεύθερος άγνωστος}$$

**Μέθοδος:**

Για να βρούμε τις άπειρες λύσεις παίρνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (όποια επιθυμούμε, αλλά μας εξυπηρετεί αυτή που έχει τους πιο μικρούς συντελεστές) και τη λύνουμε ως προς ένα άγνωστο.

Παρατήρηση:

Αν στις άπειρες λύσεις  $\left(\frac{7+3y}{2}, y\right)$  θέσουμε όπου  $y = k$  θα έχουμε:

$$\left(\frac{7+3k}{2}, k\right) \quad k \in \mathbb{R} \text{ ελεύθερος άγνωστος}$$

### Παράδειγμα 8

$$\text{Να λυθεί το } (\Sigma) \begin{cases} 0,4x + 1,2 = 0,5 & (1) \\ 0,06x + 1,3y = 0,17 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης (1) με το 10 και της (2) με το 100. Έτσι το (Σ) γίνεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x + 1,2y = 0,5 \\ 0,06x + 1,3y = 0,17 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 10 \\ \cdot 100 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 12y = 5 & (3) \\ 6x + 130y = 17 & (4) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ΕΚΠ (4,6) = 12 Άρα το (Σ) γίνεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 12y = 5 \\ 6x + 130y = 17 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 36y = 15 \\ -12x - 260y = -34 \end{cases}$$

$$(+)-224y = -19 \Leftrightarrow y = \frac{19}{224} \quad (5)$$

$$(3) \Leftrightarrow 4x + 12 \cdot \frac{19}{224} = 5 \Leftrightarrow 224 \cdot 4x + 224 \cdot 12 \cdot \frac{19}{224} = 224 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 896x + 228 = 1120 \Leftrightarrow 896x = 1120 - 228 \Leftrightarrow 896x = 892$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{892}{896} \Leftrightarrow x = \frac{223}{224}$$

Από (3) και (6) το (Σ) έχει μοναδική λύση, την:  $(x, y) = \left(\frac{223}{224}, \frac{19}{224}\right)$

Μέθοδος:

Επειδή οι δεκαδικοί συντελεστές δυσχεραίνουν τις πράξεις προσπαθούμε να τους μετατρέψουμε σε ακραίους πολλαπλασιάζοντας τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς.

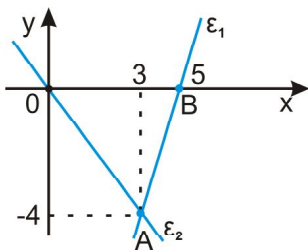


$$(2) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} -2 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) + \beta = 3 \Leftrightarrow \frac{8}{7} + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 3 - \frac{8}{7} \Leftrightarrow \beta = \frac{21-8}{7} \Leftrightarrow \beta = \frac{13}{7} \quad (5)$$

Από (4) και (5) η (1) γίνεται:  $y = -\frac{4}{7}x + \frac{13}{7}$

### Παράδειγμα 11

Ποιο σύστημα παριστάνουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ;



### Λύση:

Τα σημεία A, B, O έχουν συντεταγμένες  $A(3, -4)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $O(0, 0)$

### Έυρεση της εξίσωσης της ευθείας ( $\varepsilon_1$ )

• Η ευθεία  $\varepsilon_1$  έχει εξίσωση  $y = ax + \beta$  (1) και διέρχεται από τα σημεία  $A(3, -4)$ ,  $B(5, 0)$   
Άρα οι συντεταγμένες των  $A(3, -4)$ ,  $B(5, 0)$  θα επαληθεύουν την (1). Έτσι έχουμε:

$$\bullet A(3, -4) : \quad (1) \Leftrightarrow -4 = a \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 3a + \beta = -4 \quad (2)$$

$$\bullet B(5, 0) : \quad (1) \Leftrightarrow 0 = a \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5a + \beta = 0 \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε το (Σ)

$$\begin{cases} 3a + \beta = -4 \\ 5a + \beta = 0 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:  $-2a = -4 \Leftrightarrow a = 2$  (4)

$$\text{Η (3)} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 5a + \beta = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2 + \beta = 0 \Leftrightarrow 10 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -10 \quad (5)$$

Απο (4) και (5) έχουμε  $a = 2$ ,  $\beta = -10$

Άρα η  $\varepsilon_1$  έχει εξίσωση  $y = ax + \beta \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \stackrel{(5)}{y} = 2x - 10 : (\varepsilon_1)$  (6)

**• Ένωση της εξίσωσης της ευθείας ( $\varepsilon_2$ )**

Η  $\varepsilon_2$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα θα έχει εξίσωση  $y = ax$  (7)

Διέρχεται όμως και από το σημείο  $A(3, -4)$

Άρα η (7) γίνεται:  $-4 = a \cdot 3 \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$  (8)

Η (7)  $\stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} y = ax \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x : (\varepsilon_2)$  (9)

Από (6) και (9) συμπεραίνουμε ότι το σύστημα των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι το:

$$(\Sigma) \begin{cases} y = 2x - 10 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases}$$

## Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για Λύση

1. Το ζεύγος  $(-2,3)$  είναι λύση του συστήματος  $(\Sigma)$

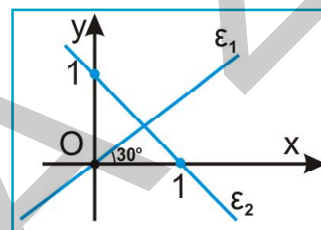
$$\begin{cases} 3x - 5y = -21 \\ 2x + 7y = 4 \end{cases}$$

Σωστό  $(\Sigma)$  ή Λάθος  $(\Lambda)$ ; Αιτιολογήστε.

2. Το  $(\Sigma)$  των 2 ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι το  $\alpha$  ή το  $\beta$ ;

$$\alpha) \begin{cases} x - y = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y = 1 \\ 3y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

Αιτιολογήστε την επιλογή σας.



3. Το σύστημα  $(\Sigma)$

$$\begin{cases} 0x + 5y = 2 \\ 3x + 0y = 4 \end{cases}$$

α) έχει μοναδική λύση      β) είναι αόριστο      γ) είναι αδύνατο  
Ποιο από τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι σωστό; Να το αιτιολογήσετε.

4. Για τους αριθμούς  $x, y \in \mathbb{R}^*$  ισχύουν:

α) η διαίρεση του  $x$  με τον  $y$  δίνει πηλίκο το διπλάσιο του  $x$  αυξημένο κατά 1 και υπόλοιπο τα δύο τρίτα του  $y$  ελαττωμένο κατά 5 και

β) η διαφορά του πενταπλάσιου του  $x$  από το ένα πέμπτο του  $y$  είναι 40

Ένας μαθητής έγραψε τα α) και β) υπό μορφή συστήματος:

$$\begin{cases} x = y(2x + 1) + \left(\frac{2}{3}y - 5\right) \\ 5x - \frac{1}{5}y = 40 \end{cases}$$

Είναι Σωστό  $(\Sigma)$  ή Λάθος  $(\Lambda)$  το σύστημα;

Αν είναι λάθος διορθώστε το ώστε να γίνει σωστό.

5. Να λυθεί το (Σ)

$$(\Sigma) \begin{cases} 0,4x - 0,6y = -\frac{1}{5} \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{1-5y}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

α) με τη μέθοδο της αντικατάστασης β) με τη μέθοδο της σύγκρισης  
γ) με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

6. Να λυθεί το (Σ)

$$(\Sigma) \begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -x + \frac{7}{3}y = 2 \end{cases}$$

7. Να λυθεί το (Σ)

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  
A(-2,4) και B(1-3)

9. Από το διπλανό σχήμα

α) να βρείτε το σύστημα των 2 ευθειών  
β) να βρείτε το σημείο τομής των 2 ευθειών

