

Ερωτήσεις Κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3(x-1)^2 + y^2 = 1 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,1)$ ή $(x,y)=(11/7,-1/7)$]

Σχόλιο:

Όταν η μία εξίσωση του συστήματος είναι 2ου βαθμού και η άλλη 1ου ο συνήθης τρόπος λύσης είναι η αντικατάσταση.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} yx^2 - 5xy = -6y & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(5/2,0)$ ή $(x,y)=(2,1)$ ή $(x,y)=(3,-1)$]

Σχόλιο:

Παρατηρούμε στην εξίσωση (1) πως όλοι οι όροι έχουν κοινό το y . Σε τέτοια περίπτωση μεταφέρουμε όλα στο 1ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

Παράδειγμα 4

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,2)$ ή $(x,y)=(2,1)$ ή $(x,y)=(-1,-2)$ ή $(x,y)=(-2,-1)$]

Σχόλιο:

Σε συστήματα που η μια εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + y^2 = a^2$ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

Παράδειγμα 5

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 13 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,1)$ ή $(x,y)=(3/2,2/3)$]

Παράδειγμα 6

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 8x^3 + 27y^3 = 35 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,1)$ ή $(x,y)=(3/2,2/3)$]

Σχόλιο:

Σε συστήματα που η μια εξίσωση είναι της μορφής $x^3 + y^3 = \alpha$ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x + y + xy = 3 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,1)$]

Παράδειγμα 8

Πόσες διαφορετικές λύσεις μπορεί να έχουν τα συστήματα:

$$\alpha)(\Sigma_1): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = ax + \beta, & a > 0 \end{cases} \quad \beta)(\Sigma_2): \begin{cases} y = ax^2, & a > 0 \\ y = \lambda x + \beta, & \lambda > 0 \end{cases} \quad \gamma)(\Sigma_3): \begin{cases} y = \frac{a}{x}, & a > 0 \\ y = \lambda x + \beta, & \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\delta)(\Sigma_4): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = ax^2, & a > 0 \end{cases} \quad \varepsilon)(\Sigma_5): \begin{cases} y = ax^2, & a > 0 \\ y = \frac{\beta}{x}, & \beta > 0 \end{cases} \quad \sigma\tau)(\Sigma_6): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = \frac{a}{x}, & a > 0 \end{cases}$$

Να δώσετε τις απαντήσεις σας γραφικά.

Λύση:

Μέθοδος:

Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις του κάθε συστήματος είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος.

Άρα το πόσες λύσεις έχει το κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα εξαρτάται από το πλήθος των σημείων τομής που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του κάθε συστήματος.

Παράδειγμα 9

Να βρείτε πόσες λύσεις έχει το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 4 & (1) \\ y - 2x = \mu + 1 & (2) \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$

Λύση:

Παράδειγμα 10

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2\mu$ (1) και η ευθεία $y = 3x + \mu$ (2). Να βρείτε το μ ώστε η ευθεία να εφάπτεται στον κύκλο.

Λύση:

[Απ. $\mu=0$ ή $\mu=20$]

Σχόλιο:

Για να εφάπτεται η ευθεία στον κύκλο θα πρέπει η ευθεία και ο κύκλος να έχουν ένα μόνο σημείο τομής. Άρα θα πρέπει το σύστημα να έχει μια μόνο λύση.

Παράδειγμα 11

Αποφάσισε ένα super - market να μοιράσει 630 κιβώτια γάλα εξίσου σε κάποιες φτωχές οικογένειες. Όμως 15 οικογένειες δεν μπορούσαν να προσέλθουν για να παραλάβουν το γάλα. Έτσι οι υπόλοιπες οικογένειες που προσήλθαν πήραν 1 κιβώτιο παραπάνω. Πόσες ήταν οι οικογένειες που έπρεπε να προσέλθουν και πόσα κιβώτια γάλα πήρε τελικά κάθε οικογένεια που προσήλθε;

Λύση:

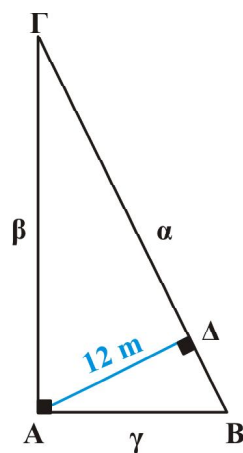
[Απ. 105 οικογένειες - 7 κιβώτια]

Παράδειγμα 12

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η περίμετρος του είναι 60m και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι 12m. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Λύση:

[Απ. 15, 20, 25]



Παράδειγμα 13

Να λυθεί το σύστημα: $|x^2 + y^2 - 2| + (x - 2y + 1)^{100} = 0$

Λύση:

[Απ. $(x,y)=(1,1)$ ή $(x,y)=(-7/5,-1/5)$]

Σχόλιο:

Αν:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για λύση

1. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

α) ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ και η ευθεία $y = ax + \beta$ έχουν:

- 1) κανένα κοινό σημείο 2) ένα κοινό σημείο
3) δύο κοινά σημεία 4) κανένα ή ένα ή δύο κοινά σημεία

β) Η παραβολή $y = ax^2$, $a \neq 0$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 0$ έχουν:

- 1) κανένα κοινό σημείο 2) ένα κοινό σημείο
3) δύο κοινά σημεία 4) κανένα ή ένα ή δύο κοινά σημεία

γ) Η παραβολή $y = ax^2$, $a \neq 0$ και η υπερβολή $y = \frac{\beta}{x}$, $\beta \neq 0$ έχουν:

- 1) ένα κοινό σημείο 2) δύο κοινά σημεία
3) τρία κοινά σημεία 4) κανένα κοινό σημείο

δ) Ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 0$ και η υπερβολή $y = \frac{\beta}{x}$, $\beta \neq 0$ έχουν:

- 1) δύο κοινά σημεία 2) τέσσερα κοινά σημεία
3) κανένα κοινό σημείο 4) κανένα ή δύο ή τέσσερα κοινά σημεία

2. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

5. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases}$

3. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 2yx^2 + xy = y \\ 3x + 7y = 3 \end{cases}$

6. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$

4. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + y + \frac{3x}{y} = 5 \\ (x + y)\frac{3x}{y} = 6 \end{cases}$

8. Για τις διάφορες τιμές του μ να βρείτε ποσες λύσεις έχει το σύστημα: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\mu x + 2\mu^2 \end{cases}$
Να εξηγήσετε κάθε φορά γραφικά τα συμπεράσματά σας.

9. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x + \lambda$ να μην τέμνονται.

10. Να βρεθούν οι πλευρές δύο τετραγώνων αν αυτές διαφέρουν κατά $2m$ και τα εμβαδά τους διαφέρουν κατά $12m^2$.

11. Ο λόγος δύο πλευρών ενός ορθογωνίου είναι π . ($\pi \approx 3,14$). Αν ένας κύκλος έχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου ν' αποδείξετε ότι η ακτίνα του ισούται με την μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου.