

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 5.

Τι ονομάζουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού (ή δευτεροβάθμια εξίσωση) μ'έναν άγνωστο και τι διακρινουσα της;

Απάντηση:

Ονομάζουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού μ'έναν άγνωστο κάθε εξίσωση που η τελική της μορφή είναι η $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση $\Delta = b^2 - 4a\gamma$

Θεωρία 6.

Να λυθεί η εξίσωση: $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

Λύση:

Έχουμε:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \quad (\text{διαιρέσαμε με } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \frac{\frac{b}{2}}{\frac{2a}{2}}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \frac{\frac{b}{2}}{\frac{2a}{2}}x + \left(\frac{\frac{b}{2}}{\frac{2a}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{2}}{\frac{2a}{2}}\right)^2 - \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\frac{b}{2}}{\frac{2a}{2}}\right)^2 = \frac{\frac{b^2}{4}}{\frac{4a^2}{4}} - \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4a\gamma}{4a^2} \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } \Delta = b^2 - 4a\gamma \text{ και η (1) γίνεται : } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $\Delta > 0$

$$\text{Από (2)} \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{cases}$$

Δηλαδή όταν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

2η περίπτωση: Αν $\Delta = 0$

$$\text{Από (2)} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{0}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Δηλαδή όταν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μία πραγματική ρίζα διπλή (ή δύο ρίζες ίσες): $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

3η περίπτωση: Αν $\Delta < 0$

Τότε $\frac{\Delta}{4\alpha^2} < 0$ και η (2) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή όταν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Θεωρία 7.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$. Γράψτε τα συμπεράσματα που έχουμε από τη λύση της για διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ .

Απάντηση:

1) Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2) αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια ρίζα διπλή πραγματική την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

3) αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, δηλαδή είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Θεωρία 8.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$. Δείξτε ότι όταν οι a και γ είναι ετερόσημοι τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Απόδειξη:

Αν οι a, γ ετερόσημοι τότε θα έχουμε $a\gamma < 0 \Leftrightarrow -4a\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4a\gamma > \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$
 Οπότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Θεωρία 9.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$. Δείξτε ότι :

- α) αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τότε $\Delta > 0$.
- β) αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες, τότε $\Delta = 0$.
- γ) αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές, τότε $\Delta < 0$.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το α) με την μέθοδο "απαγωγή σε άτοπο".

α) Έστω ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Θα δείξουμε ότι $\Delta > 0$.

- Αν ήταν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση θα είχε δύο ρίζες πραγματικές και ίσες. Άτοπο.
- Αν ήταν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δε θα έχει ρίζες πραγματικές. Άτοπο.

Δηλαδή η Δ δεν μπορεί να είναι $\Delta = 0$ ή $\Delta < 0$. Άρα $\Delta > 0$

β, γ) Η απόδειξη γίνεται όμοια με το α).

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

Θεωρία 10.

A) Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0, \Delta \geq 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της.

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της $S = x_1 + x_2$ και γινόμενο των ριζών της $P = x_1 \cdot x_2$ δίνονται από τους τύπους:

$$\alpha) S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\beta) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

B) Πώς ονομάζονται οι παραπάνω τύποι;

Απόδειξη:

A) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα. Οι ρίζες x_1, x_2 είναι οι:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}. \text{ Τότε έχουμε:}$$

$$\alpha) x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\beta) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta - \sqrt{\Delta})}{2\alpha \cdot 2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{Άρα: } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

B) Οι παραπάνω τύποι ονομάζονται τύποι του Vietta.

Θεωρία 11.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$. Πώς μετασχηματίζεται η εξίσωση με την βοήθεια των τύπων του Vietta;

Απάντηση:

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (1) \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2)$$

$$\text{Έχουμε: } ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{\gamma}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{a}\right)x + \frac{\gamma}{a} = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 - Sx + P = 0 \stackrel{(2)}{}$$

Δηλαδή: $ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$ όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών.

Θεωρία 12.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη της εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$.

$$\text{Δηλαδή: } ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \quad (1)$$

Τί δυνατότητες μας δίνει αυτός ο μετασχηματισμός;

Απάντηση:

Ο μετασχηματισμός (1) μας δίνει τις εξής δυνατότητες:

- 1) Η μορφή $x^2 - Sx + P = 0$ είναι μια εξίσωση που έχει ρίζες τα x_1, x_2 με γινόμενο P (σταθερός όρος) και άθροισμα S (αντίθετος συντελεστής του x). Άρα οι δύο ρίζες θα είναι οι δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο το σταθερό όρο P και άθροισμα τον αντίθετο συντελεστή του x , δηλαδή το S . **(Προσοχή:** αυτή την μέθοδο εύρεσης των ριζών την εφαρμόζουμε μόνο όταν ο συντελεστής του x^2 είναι 1 δηλαδή $a = 1$, και όταν μπορούμε με δοκιμές να βρούμε αυτούς τους αριθμούς. Αν δεν μπορούμε δε σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. Απλά είναι δύσκολη η εύρεση αυτών των αριθμών και τότε εργαζόμαστε με τη διακρίνουσα Δ).
- 2) Η $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ρίζες δύο αριθμούς, κ, λ , με γινόμενο $\kappa \cdot \lambda = P$ και άθροισμα $\kappa + \lambda = S$. Άρα όταν αναζητούμε δύο αριθμούς με γνωστό άθροισμα S και γινόμενο P αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ και να βρούμε τις ρίζες της. Αυτές οι ρίζες είναι και οι ζητούμενοι αριθμοί.
- 3) Η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ είναι κατασκευή της εξίσωσης που έχει γινόμενο ριζών το P και άθροισμα το S . Δηλαδή ενώ μέχρι τώρα λύναμε το πρόβλημα : να βρεθούν οι ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0$ τώρα λύνουμε ακριβώς το αντίστροφο πρόβλημα δηλαδή να βρεθεί η εξίσωση που έχει για ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 . Προφανώς αυτή είναι πάντα η $x^2 - Sx + P = 0$ όπου: $S = x_1 + x_2, \quad P = x_1 \cdot x_2$

Να βρίσκουμε τις ρίζες μιας εξίσωσης 2ου βαθμού χωρίς να την λύνουμε.

Να βρίσκουμε 2 αριθμούς με γνωστό γινόμενο και γνωστό άθροισμα.

Να κατασκευάζουμε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 .

Θεωρία 13.

Γράψτε και αιτιολογήσετε τις συνθήκες για τα Δ, P, S ώστε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, να έχει:

α) δύο ρίζες ετερόσημες

β) δύο ρίζες θετικές

γ) δύο ρίζες αρνητικές και άνισες

δ) μία ρίζα το μηδέν και η άλλη θετική.

Απάντηση:

α) Δύο ρίζες ετερόσημες $\Leftrightarrow P < 0$

Αιτιολόγηση: Επειδή $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} < 0 \Leftrightarrow a \cdot \gamma < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$ (απο γνωστή θεωρία)

δηλαδή $\Delta > 0$ (δύο ρίζες), $P < 0$ (ετερόσημες)

β) Δύο ρίζες θετικές $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0, S > 0$

Αιτιολόγηση: Επειδή $\Delta \geq 0$ έχουμε δύο ρίζες. Επειδή $P > 0$ ρίζες ομόσημες και επειδή $S > 0$ οι ομόσημες ρίζες είναι θετικές.

γ) Δύο ρίζες αρνητικές και άνισες $\Leftrightarrow \Delta > 0, P > 0, S < 0$

Αιτιολόγηση: Επειδή $\Delta > 0$ έχουμε δύο ρίζες άνισες. Επειδή $P > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες και επειδή $S < 0$ οι ομόσημες ρίζες είναι αρνητικές.

δ) Μία ρίζα το μηδέν και η άλλη θετική $\Leftrightarrow P = 0, S > 0$

Αιτιολόγηση: Επειδή $P = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$. Επειδή $S > 0 \Leftrightarrow$ η άλλη ρίζα είναι θετική (αφού η μία είναι μηδέν).

Εξισώσεις-προβλήματα που ανάγονται σε λύση εξισώσεων β' βαθμού

Θεωρία 14.

Ποια εξίσωση ονομάζεται διτετράγωνη και πώς λύνεται;

Απάντηση:

Διτετράγωνη λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$ax^4 + bx^2 + \gamma = 0, a \neq 0$. Για να τη λύσουμε θέτουμε όπου $x^2 = y$ οπότε η διτετράγωνη εξίσωση γίνεται:

$ax^4 + bx^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + \gamma = 0, a \neq 0$. Δηλαδή η λύση κάθε διτετράγωνης ανάγεται στη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Σημείωση:

Η δευτεροβάθμια εξίσωση:
 $ay^2 + by + \gamma = 0, a \neq 0$
 που προκύπτει μετά την αντικατάσταση $x^2 = y$ στην διτετράγωνη εξίσωση λέγεται επιλύουσα της διτετράγωνης εξίσωσης $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0, a \neq 0$

Μέθοδοι

Που είναι απαραίτητες σ'όλη την έκταση του κεφαλαίου. Θα πρέπει τις παρακάτω εκφράσεις να τις μεταφράζουμε σύμφωνα με τα Δ, Ρ, Σ.

1. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες $\Leftrightarrow$
2. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες ίσες (ή μία ρίζα διπλή) $\Leftrightarrow$
3. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow$
4. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow$
5. Οι αριθμοί κ, λ, ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow$
6. Η εξίσωση που έχει ρίζες τα Α και Β είναι η:
 $x^2 - Sx + P = 0$ όπου $S = A + B$, $P = A \cdot B$
7. Δύο αριθμοί Α και Β που έχουν άθροισμα $S = A + B$ και γινόμενο $P = A \cdot B$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$
8. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - kx + \lambda = 0$ είναι οι αριθμοί που έχουν γινόμενο λ και άθροισμα κ.
9. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων $\Leftrightarrow \Delta > 0$, $a \neq 0$
10. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο $\Leftrightarrow \Delta = 0$ και $a > 0$
11. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, γράφεται σαν άθροισμα δύο τετραγώνων $\Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a > 0$
12. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων $\Leftrightarrow \Delta > 0$
13. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο επί το α $\Leftrightarrow \Delta = 0$
14. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ γράφεται σαν άθροισμα δύο τετραγώνων επί το α $\Leftrightarrow \Delta < 0$
15. Στο τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ οι α, β, γ είναι ρητοί τότε:
 Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ρητές $\Leftrightarrow \Delta$ τέλειο τετράγωνο.
16. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a > 0$.
17. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a < 0$.
18. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a \neq 0$

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ έχει:

19. Δύο ρίζες ετερόσημες $\Leftrightarrow$
20. Δύο ρίζες θετικές $\Leftrightarrow$
21. Δύο ρίζες αρνητικές $\Leftrightarrow$
22. Δύο ρίζες θετικές και άνισες $\Leftrightarrow$
23. Δύο ρίζες θετικές και ίσες $\Leftrightarrow$
24. Δύο ρίζες αρνητικές και ίσες $\Leftrightarrow$
25. Δύο ρίζες ετερόσημες με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την θετική $\Leftrightarrow$
26. Δύο ρίζες ετερόσημες με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την αρνητική $\Leftrightarrow$
27. Μια ρίζα το μηδέν $\Leftrightarrow$
28. Μια ρίζα θετική και η άλλη το μηδέν $\Leftrightarrow$
29. Μια ρίζα αρνητική και η άλλη το μηδέν $\Leftrightarrow$
30. Δύο ρίζες ίσες με μηδέν $\Leftrightarrow$
31. Δύο ρίζες αντίστροφες $\Leftrightarrow$
32. Δύο ρίζες αντίθετες $\Leftrightarrow$
33. Δύο ρίζες ομόσημες $\Leftrightarrow$
34. Δύο ρίζες διαφορετικές και ομόσημες $\Leftrightarrow$
35. Δύο ρίζες ομόσημες και ίσες $\Leftrightarrow$