

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για Λύση

31. Η εξίσωση $ax^2 + x - a = 0$, $a \neq 0$:

α) Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Είναι αδύνατη

γ) Έχει μία ρίζα διπλή

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την.

32. Αν η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$ έχει μια ρίζα διπλή τότε:

α) $\lambda = 1$ ή $\lambda = 5$

β) $\lambda = 1$

γ) $\lambda = 5$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την.

33. Χαρακτηρίστε τα παρακάτω Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) αιτιολογώντας:

α) Η εξίσωση $x^2 + \beta^2 x + \frac{\beta^4}{4} + \beta^2 + 1 = 0$ είναι αδύνατη.

β) Η εξίσωση $2^{20} \cdot x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x - a^2 - \sqrt{7} = 0$ είναι αδύνατη.

34. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3x^2 - 7x = 0$

β) $2x^2 - 8 = 0$

γ) $3x^2 + 4 = 0$

δ) $(x-1)^2 - 3x(1-x) = 2x-1$

ε) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

στ) $x^2 + x + 1 = 0$

35. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}x^2 - 2x + 0,5 = 0$

36. Αν το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 2\lambda x + 5\mu = 0$, να δείξετε ότι $8\lambda^3 + 125\mu^3 = 30\lambda\mu - 1$

37. Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 5\lambda x + 7\mu^2 = 0$, να δείξετε ότι $\rho^2 \leq 5|\lambda\rho| + 7\mu^2$

38. Αν το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $(\lambda^2 + 1)x^2 - 5\lambda x + 5 = 0$, να βρείτε το λ και μετά την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

39. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 5x + \lambda - 3 = 0$. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση:
- α) Να έχει δύο ρίζες διαφορετικές και πραγματικές.
 - β) Να έχει μια ρίζα διπλή την οποία και να βρείτε.
 - γ) Να είναι αδύνατη
 - δ) Για $\lambda = -5^{30}$, πόσες ρίζες έχει η εξίσωση;
40. Αν η εξίσωση $(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 - (\lambda^2 - 6\lambda)x - 3$ δεν έχει ρίζα το $x = 0$, να βρείτε το λ .
41. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 + (a - 3\beta)x + a\beta = 0$ και $x^2 + (a - 5\beta)x + 4\beta^2 = 0$, $(a \cdot \beta < 0)$. Να δείξετε ότι έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. Ποιό είναι αυτό;
42. Δείξτε ότι η εξίσωση $ax^2 - (a + 2\beta)x + \beta = 0$ έχει πάντα λύση για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.
43. Αν το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τα a, β, γ και υποτείνουσα το γ , να δείξετε ότι η εξίσωση $(a^2 + \beta^2)x^2 - 2a\gamma x - \beta^2 + \gamma^2 = 0$ έχει μία ρίζα διπλή την οποία και να βρείτε.
44. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν αυτά είναι τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί.
45. Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει ρίζες πραγματικές, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για την εξίσωση:
- $$ax^2 + 2(a + \beta)x + (a + 2\beta + 4\gamma) = 0$$
46. Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με πλευρές τα a, β, γ είναι σκαληνό, δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2$ είναι αδύνατη.
47. Αφού βρείτε στα παρακάτω, ποιά είναι λάθος, να τα διορθώσετε, ώστε να γίνουν σωστά.

- α) η εξίσωση $-x^2 + 5x + 7 = 0$ έχει $S = 5$ και $P = 7$
 β) η εξίσωση $-2x^2 + 2ax + 4 = 0$ έχει $S = a$ και $P = 2$
 γ) η εξίσωση $-5x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει ρίζες ετερόσημες
 δ) η εξίσωση $2x^2 + 8x + 2 = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες
 ε) η εξίσωση που έχει για ρίζες τους αριθμούς -2 και 4 είναι η $x^2 + 2x + 8 = 0$
 στ) η εξίσωση $x^2 - 6x + 7 = 0$ έχει ρίζες ομόσημες
 ζ) η εξίσωση $x^2 - (\kappa^2 + 1) = 0$ δεν έχει ρίζες αντίθετες.

48. Χωρίς να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, να βρείτε τις ρίζες τους (με S και P)

- α) $x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + \sqrt{7} = 0$ β) $x^2 - (\sqrt{2} + 2)x + \sqrt{8} = 0$
 γ) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ δ) $x^2 + 6\kappa x + 8\kappa^2 = 0$
 ε) $x^2 - 6\kappa x + 9\kappa^2 - 1 = 0$ στ) $x^2 - (a^2 + 2a)x + (a^3 - 1) = 0$

49. Δίνεται ότι η εξίσωση $-x^2 + x + 1 = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 . Χωρίς να βρείτε τις ρίζες να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

- α) $(2x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_2)^2$ β) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$
 γ) $(1 - x_1)(1 - x_2)$ δ) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$ ε) $\frac{1}{3x_1 + 1} + \frac{1}{3x_2 + 1}$
 στ) $-2x_1^4 x_2^5 + 3x_1 x_2^2 - 2x_1^5 x_2^4 + 3x_1^2 x_2 + 13$

50. Έστω η εξίσωση $x^2 - 3x - 6 = 0$ με ρίζες τις x_1, x_2 . Χωρίς να βρείτε τις ρίζες να κατασκευάσετε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τις:

- α) $\frac{2x_1}{3}, \frac{2x_2}{3}$ β) $x_1^2 - x_2, x_2^2 - x_1$ γ) $1 - 2x_1, 1 - 2x_2$ δ) $x_1^3 + x_2^3, 5$

51. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

- α) $2x^2 - 7x - \lambda^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες ετερόσημες
 β) $-3x^2 + 4x - 0,7 = 0$ έχει ρίζες θετικές και άνισες
 γ) $0,61x^2 + \sqrt{300}x + 0,7$ έχει ρίζες αρνητικές και άνισες.
 δ) $0,47x^2 + 500x + 0,47 = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

52. Δίνεται ότι η εξίσωση $-x^2 + (\lambda - 1)x + 2 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές τις x_1, x_2 . Να υπολογίσετε το λ αν $(x_1 - x_2)^2 - 3x_1 = 6 + 3x_2$

53. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda + 2 = 0$. Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και η μία να είναι πενταπλάσια της άλλης ελαττωμένη κατά 2.

54. Έστω η εξίσωση: $x^2 + 4x + 1 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι:
α) $x_2^2 + 4x_2 + 1 = 0$ β) $x_1^2 + 4x_1^2 x_2 + 1 = 0$ γ) $x_1^2 + 8x_1 + 4x_2 + 17 = 0$

55. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 4(1 - 5\kappa)x - (7 + 3\kappa)^2 = 0$

α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Για ποιο κ έχει ρίζες αντίθετες;

56. Έστω ότι η εξίσωση $2\mu^2 x + (\lambda + \mu^{300})x - 20 = 0$, $\mu \neq 0$, έχει μια ρίζα το 5. Να βρείτε την άλλη ρίζα.

57. Αν η εξίσωση $2x^2 + 6x - 4(\alpha^3 - \beta) \cdot \kappa^{100} = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές x_1, x_2 με $x_1 = 3$ να βρείτε την x_2

58. Έστω ότι η εξίσωση $x^2 - \kappa x + \lambda = 0$, $\lambda > 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές.

α) Αν η μία ρίζα είναι τετραπλάσια της άλλης να δείξετε ότι $4\kappa^2 = 25\lambda$

β) Αν η μία είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης, τότε να δείξετε ότι $(\kappa - \sqrt[3]{\lambda})^3 = \lambda^2$

59. Έστω η εξίσωση: $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + (\lambda + 2) = 0$, $\lambda > 0$. Για ποιες τιμές του λ έχει ρίζες:

α) ετερόσημες με μεγαλύτερη
κατ' απόλυτη τιμή την αρνητική

γ) αντίθετες

ε) αρνητικές και άνισες

ζ) άνισες

β) ομόσημες

δ) θετικές

στ) ίσες

η) αντίστροφες

60. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ και $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ρίζες της εξίσωσης $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$, $(a \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot \lambda \cdot \mu \cdot x_1 \cdot x_2 \neq 0)$ να αποδείξετε ότι τα a, β είναι ανάλογα με τα μ, λ .

61. Έστω ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + \mu + 5 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές τις ρ_1 και ρ_2 .

Να υπολογίσετε τα λ και μ αν ισχύουν:
$$\begin{cases} 5\rho_1\rho_2 + 7\rho_1 + 7\rho_2 = 4 \\ \frac{3}{\rho_1} + \frac{3}{\rho_2} = 7 \end{cases}$$

62. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 2x + 3 = 0$ να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (\rho_1 - \rho_2)^2 x + \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2} + \frac{2\rho_2}{\rho_1} \right) y = \rho_1^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_2^2 \\ (\rho_1^3 + \rho_2^3) x - (1 - 2\rho_1)(1 - 2\rho_2) y = 4 \end{cases}$$

63. Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 .

α) Αν $A = x_1 + x_2$, $B = x_1^2 + x_2^2$, $\Gamma = x_1^3 + x_2^3$ να αποδείξετε ότι: $\gamma A + \beta B + \alpha \Gamma = 0$

β) Αν $\kappa = x_1^{97} + x_2^{97}$, $\lambda = x_1^{98} + x_2^{98}$, $\mu = x_1^{99} + x_2^{99}$ να αποδείξετε ότι:
 $\gamma \cdot \kappa + \beta \lambda + \alpha \mu = 0$

64. Έστω η εξίσωση $(\kappa - 2)x^2 + (2\kappa + 1)x + \kappa = 0$, $\kappa \neq 2$. Να βρείτε το κ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι:

α) αντίθετες

β) αντίστροφες

γ) η μία διάφορη του μηδενός και η άλλη μηδέν.

65. Έστω ότι η εξίσωση $-x^2 + (2\mu + 1)x - (-24\mu^2 + 1) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 . Αν ισχύει $2x_1 + 3x_2 = 4$ τότε:

α) να βρείτε το μ .

β) να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 .

66. Δίνεται ότι η εξίσωση $x^2 - (a - \beta)x + 1 = 0$ με $a - \beta > 1$ έχει διπλή ρίζα την x_0 .

α) Να βρείτε τη διπλή ρίζα.

β) Αν επιπλέον ισχύει $(2a + 3\beta)x_0^{100} = 5$ να βρείτε τα a, β

67. Αν τα a, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax^2 - 2(\beta + \gamma)x + a = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές, θετικές και άνισες.

68. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 4|x| + 4 = 0$

69. Να λυθεί η εξίσωση: $(3x - 2)^2 - 2 = |3x - 2|$

70. Να λυθεί η εξίσωση: $(x + 1)^2 - 2|x + 3| + 4 = 0$

71. Να λυθεί η εξίσωση: $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$

72. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x}{5-x} + \frac{5}{x+5} = \frac{x^2+25}{25-x^2} + 1$

73. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-2}{2x} + \frac{2}{2-x} = \frac{4}{x^2-2x}$

74. Να λυθεί η εξίσωση: $x + \sqrt{x-1} = 7$

75. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2 + 2x - 3)^2 + (x^2 + 2x + 4) - 9 = 0$

76. Να λυθεί η εξίσωση: $|x^2 - 5x + 6| + (x^2 - 7x + 10)^{70} = 0$

77. Να βρεθεί το λ αν το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης:
 $(2-x)^3 (\lambda-1)^2 + (\mu-3)(x^2-4x+3) + 6 = 5(2-x^2) |1-\lambda|$

78. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

β) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

γ) $3x^4 - x^2 + 2 = 0$

79. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - a(a-1)x^2 - a^3 = 0, \quad a > 0$

80. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^3 - 1)^4 + 5(x^3 - 1)^2 - 6 = 0$