

Ανισώσεις

Δ.1 *(4.1 παρ/φος σχολικού βιβλίου)*

Ανισώσεις 1ου βαθμού

Δ.2 *(4.2 παρ/φος σχολικού βιβλίου)*

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Δ.3 *(4.3 παρ/φος σχολικού βιβλίου)*

Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκου

Δ.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

§4.1

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $ax + \beta > 0$ β) $ax + \beta < 0$

Λύση:

α) Είναι: $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow ax + \beta + (-\beta) > 0 + (-\beta) \Leftrightarrow ax > -\beta$ **(1)**

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

Αν $a > 0$. Διαιρούμε τα μέλη της (1) με το a , (αφού $a > 0$ η ανίσωση δεν αλλάζει φορά)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{ax}{a} > -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{a}$$

2η περίπτωση:

Αν $a < 0$. Διαιρούμε τα μέλη της (1) με το a . (αφού $a < 0$ η ανίσωση αλλάζει φορά).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{ax}{a} < -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{a}$$

3η περίπτωση:

Αν $a = 0$. Η (1) γίνεται: $0x > -\beta$. **(2)**

i) Όταν $\beta > 0 \Leftrightarrow -\beta < 0$, η (2) τότε θα αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(το πρώτο μέλος της (2) είναι 0 και το δεύτερο αρνητικός αριθμός)

ii) Όταν $\beta \leq 0 \Leftrightarrow -\beta \geq 0$, η (2) τότε θα είναι αδύνατη,

(το πρώτο μέλος της (2) είναι 0 και το δεύτερο θετικός αριθμός ή μηδέν).

Τα συμπεράσματα της παραπάνω διερεύνησης συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

$ax + b > 0$		
$a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	
$a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	
$a = 0$	$b \leq 0$	αδύνατη
	$b > 0$	αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Με τον ίδιο τρόπο λύνεται και η $ax + b < 0$

Ανισώσεις με απόλυτα

Θεωρία 2.

Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες:

α) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ β) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις παραπάνω ανισώσεις όταν $\theta < 0$;

Απόδειξη:

α) 1ος τρόπος:

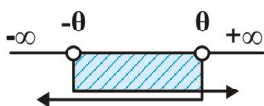
Οι αριθμοί θ και $|x|$ είναι θετικοί (ή μηδέν το x) οπότε μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο τα μέλη της $|x| < \theta$ και ισοδύναμα θα έχουμε:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow |x|^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 < 0 \Leftrightarrow (x - \theta)(x + \theta) < 0 \quad (1)$$

Για να ισχύει η (1) πρέπει $x - \theta$, $x + \theta$ να είναι ετερόσημοι οπότε:
 $x - \theta < 0$ και $x + \theta > 0$ (διότι $x - \theta < x + \theta$).

Οπότε $x - \theta < 0 \Leftrightarrow x < \theta$ και $x + \theta > 0 \Leftrightarrow x > -\theta$

Συναλήθευση:



Δηλαδή: (1) $\Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

2ος τρόπος:

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x \geq 0$ τότε $|x| = x$ άρα:
 $|x| < \theta$ οπότε $x < \theta$ και $x > -\theta$ ($x \geq 0$ και $-\theta < 0$)
- Αν $x \leq 0$ τότε $|x| = -x$ άρα:
 $|x| < \theta$ οπότε $-x < \theta \Leftrightarrow x > -\theta$ και $x < \theta$ ($x \leq 0$ και $\theta > 0$)

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Γενικεύοντας την παραπάνω ιδιότητα: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \quad \theta > 0$

β) 1ος τρόπος:

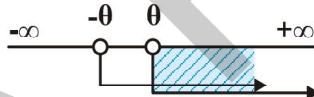
Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$|x| > \theta \Leftrightarrow |x|^2 > \theta^2 \Leftrightarrow x^2 > \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 > 0 \Leftrightarrow (x - \theta) \cdot (x + \theta) > 0 \quad (1)$$

Για να ισχύει η (1) θα πρέπει $x - \theta$, $x + \theta$ να είναι ομόσημοι. Δηλαδή:

- Εάν $x - \theta > 0 \Leftrightarrow x > \theta$ τότε και $x + \theta > 0 \Leftrightarrow x > -\theta$

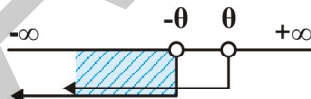
Συναληθεύοντας:



έχουμε : $x > \theta$.

- Εάν $x - \theta < 0 \Leftrightarrow x < \theta$ τότε και $x + \theta < 0 \Leftrightarrow x < -\theta$.

Συναληθεύοντας:



έχουμε : $x < -\theta$.

Οπότε για κάθε x πραγματικό αριθμό ισχύει: $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$.

2ος τρόπος:

Διακρίνουμε περιπτώσεις: • Εάν $x \geq 0$ τότε $|x| = x$ άρα: $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$

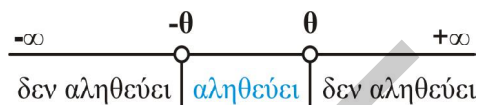
- Εάν $x < 0$ τότε $|x| = -x$ άρα: $|x| > \theta \Leftrightarrow -x > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$

Άρα σε κάθε περίπτωση : $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

3ος τρόπος:

Η ανίσωση $|x| > \theta$ αληθεύει για εκείνα μόνο τα x για τα οποία δεν αληθεύει η $|x| \leq \theta$.

Όμως $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ δηλαδή:



Οπότε η $|x| \leq \theta$ δεν αληθεύει για $x < -\theta$ ή $x > \theta$. Επομένως η $|x| > \theta$ αληθεύει για $x < -\theta$ ή $x > \theta$.

Γενικεύοντας την παραπάνω ιδιότητα: $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$, $\theta > 0$

Όταν $\theta < 0$ τότε:

- Η $|x| < \theta$ δεν αληθεύει για κανένα $x \in \mathbb{R}$ (αδύνατη).
- Η $|x| > \theta$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ερωτήσεις Κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 (Σωστό - Λάθος)

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- i) Οι λύσεις της ανίσωσης $-ax > 3$ όταν $a > 0$ είναι τα: $x \in \left(\frac{3}{a}, +\infty\right)$.
- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $(a - 1)x > a$ όταν $a = 1$ είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.
- iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $(a - 2)x \geq -2$ είναι μόνο τα $x \in \left[-\frac{2}{a-2}, +\infty\right)$, για κάθε $a \geq 2$.
- iv) Οι λύσεις της ανίσωσης $(a^2 + 2a + 3)x > 2004$ είναι $x \in \left(-\infty, \frac{2004}{a^2 + 2a + 3}\right)$.

Απάντηση:

i) **Λάθος:** Όταν $\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha < 0$. Άρα $-\alpha x > 3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{\alpha}$, δηλαδή $x \in (-\infty, -\frac{3}{\alpha})$

ii) **Λάθος:** Για $\alpha = 1$ η ανίσωση γίνεται $0x > 1$ που είναι αδύνατη.

iii) **Λάθος:** Έχουμε: $\alpha \geq 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 \geq 0$

- Για $\alpha - 2 > 0$ οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $(\alpha - 2)x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{\alpha - 2}$

δηλαδή: $x \in \left[-\frac{2}{\alpha - 2}, +\infty\right)$

- Για $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ η ανίσωση γίνεται: $(2 - 2)x \geq -2 \Leftrightarrow 0x \geq -2$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) **Λάθος:** Έχουμε: $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 2 = (\alpha + 1)^2 + 3 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Οπότε: $(\alpha^2 + 2\alpha + 3)x > 2004 \Leftrightarrow x > \frac{2004}{\alpha^2 + 2\alpha + 3}$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{2004}{\alpha^2 + 2\alpha + 3}, +\infty\right)$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{4} > \frac{x}{12}$

Λύση:

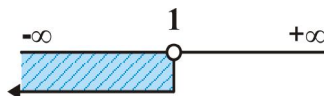
Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και στην συνέχεια κάνουμε απαλοιφή.

Έχουμε: Ε.Κ.Π. (3, 4, 12) = 12 οπότε: $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{4} > \frac{x}{12} \Leftrightarrow 12 \frac{x}{3} - 12 \frac{2x-1}{4} > 12 \frac{x}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 3(2x-1) > x \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 > x \Leftrightarrow 4x - 6x - x > -3 \Leftrightarrow -3x > -3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} < \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow x < 1$

Άρα το διάστημα των λύσεων είναι το $(-\infty, 1)$.

Γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων:



Παράδειγμα 3

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x-1}{2} + \frac{3x+2}{4} \geq \frac{5x}{4}$

Λύση:

Έχουμε: Ε.Κ.Π. (2, 4, 4) = 4 οπότε: $\frac{x-1}{2} + \frac{3x+2}{4} \geq \frac{5x}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x-1}{2} + 4 \cdot \frac{3x+2}{4} \geq 4 \cdot \frac{5x}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2(x-1) + 3x+2 \geq 5x \Leftrightarrow 2x-2+3x+2 \geq 5x \Leftrightarrow 2x+3x-5x \geq 2-2 \Leftrightarrow 0x \geq 0$
 που αληθεύει για κάθε x πραγματικό αριθμό.

Επομένως οι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$

Σημείωση:

Οι ανισώσεις της μορφής $0x \geq 0$, $0x \leq 0$ αληθεύουν για κάθε x πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x}{a^2+1} + \frac{x-1}{a^2+1} > 2$

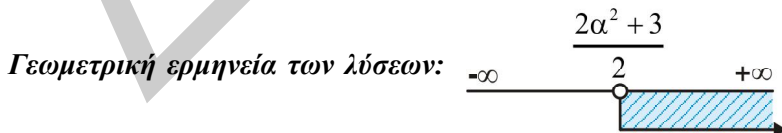
Λύση:

Επειδή $a^2+1 > 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

Άρα η ανίσωση γράφεται: $\frac{x}{a^2+1} + \frac{x-1}{a^2+1} > 2 \Leftrightarrow$

$$(a^2+1) \frac{x}{a^2+1} + (a^2+1) \frac{x-1}{a^2+1} > 2(a^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+x-1 > 2a^2+2 \Leftrightarrow 2x > 2a^2+3 \Leftrightarrow x > \frac{2a^2+3}{2}$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Απαλοιφή παρονομαστών σε μια ανίσωση κάνουμε όταν το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών διατηρεί σταθερό πρόσημο. Δηλαδή όταν είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο απ'το μηδέν για κάθε τιμή της μεταβλητής.

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι τιμές x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x+2}{4} - \frac{x}{3} \leq 1 \quad (1) \qquad \frac{x}{5} - \frac{x+1}{15} < 0 \quad (2)$$

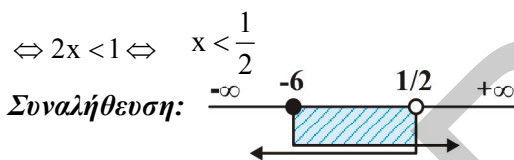
Λύση:

Για την (1) έχουμε: [Ε.Κ.Π. (4,3)=12]

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{4} - \frac{x}{3} &\leq 1 \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x+2}{4} - 12 \cdot \frac{x}{3} \leq 12 \cdot 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x+2) - 4x &\leq 12 \Leftrightarrow 3x + 6 - 4x \leq 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x &\leq 6 \Leftrightarrow x \geq -6\end{aligned}$$

Για την (2) έχουμε: [Ε.Κ.Π.(5,15)=15]

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} - \frac{x+1}{15} &< 0 \Leftrightarrow 15 \cdot \frac{x}{5} - 15 \cdot \frac{x+1}{15} < 15 \cdot 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - (x+1) &< 0 \Leftrightarrow 3x - x - 1 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &< 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}\end{aligned}$$



Άρα για να συναληθεύουν οι ανισώσεις πρέπει: $-6 \leq x < \frac{1}{2}$

Μέθοδος:

Λύνουμε χωριστά τις ανισώσεις. Παριστάνουμε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών και βρίσκουμε τις τιμές του x (αν υπάρχουν), για τις οποίες συναληθεύουν.

Παράδειγμα 6

Για την τιμή του a που κάνει την εξίσωση $ax+1=a^2+x$ (1) ταυτότητα, να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x-a)^2 + (a-x)^2 + 2x^2 > (2x-a)^2 + 2x \quad (3) \quad \text{και} \quad (1-2a)x - ax < a+3 \quad (4)$$

Λύση:

Η (1) γράφεται: $ax+1=a^2+x \Leftrightarrow ax-x=a^2-1 \Leftrightarrow (a-1)x=a^2-1 \quad (5)$

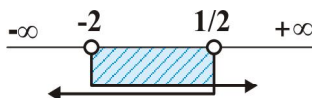
Για να είναι η (5) ταυτότητα πρέπει $a-1=0$ και $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=1$ και $a=\pm 1$. Άρα $a=1$. Με αντικατάσταση όπου $a=1$ στις (3), (4) αντίστοιχα, έχουμε:

$$(3) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (1-x)^2 + 2x^2 > (2x-1)^2 + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + 1^2 - 2x + x^2 + 2x^2 > 4x^2 - 4x + 1 + 2x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$(4) \Leftrightarrow (1-2 \cdot 1) \cdot x - 1 \cdot x < 1+3 \Leftrightarrow -x-x < 4 \Leftrightarrow -2x < 4 \Leftrightarrow x > -2$$

Κάνουμε συναλήθευση των παραπάνω λύσεων και έχουμε:



$$\text{δηλαδή: } -2 < x < \frac{1}{2}.$$

Επειδή θέλουμε ο x να είναι ακέραιος, οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν: $x = -1$ ή $x = 0$.

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η ανίσωση: $\lambda(x+1) \geq 1-2x$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Λύση:

$$\text{Έχουμε: } \lambda(x+1) \geq 1-2x \Leftrightarrow \lambda x + \lambda \geq 1-2x \Leftrightarrow \lambda x + 2x \geq 1-\lambda \Leftrightarrow (\lambda+2)x \geq 1-\lambda \quad (1)$$

$$1\text{η περίπτωση: Εάν } \lambda+2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2 \text{ η (1) αληθεύει όταν: } x \geq \frac{1-\lambda}{\lambda+2}$$

$$2\text{η περίπτωση: Εάν } \lambda+2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ η (1) αληθεύει όταν: } x \leq \frac{1-\lambda}{\lambda+2}$$

$$3\text{η περίπτωση: Εάν } \lambda+2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:}$$

$$(-2+2)x \geq 1-(-2) \Leftrightarrow 0x \geq 3 \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η ανίσωση: $ax+3 \leq \beta-x$, για τις διάφορες τιμές των a, β .

Λύση:

$$\text{Έχουμε: } ax+3 \leq \beta-x \Leftrightarrow (a+1) \cdot x \leq \beta-3 \quad (1) \text{ Διακρίνουμε περιπτώσεις:}$$

$$1\text{η περίπτωση: Εάν } a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1 \text{ τότε η (1) έχει λύσεις: } x \leq \frac{\beta-3}{a+1}$$

$$2\text{η περίπτωση: Εάν } a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1 \text{ τότε η (1) έχει λύσεις: } x \geq \frac{\beta-3}{a+1}$$

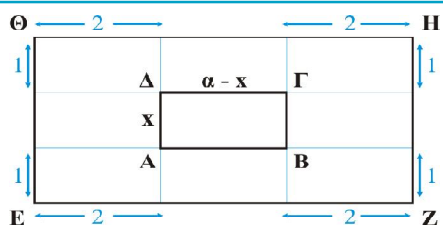
$$3\text{η περίπτωση: Εάν } a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ τότε (1) γίνεται: } 0 \cdot x \leq \beta-3 \quad (2)$$

- Εάν $\beta-3 \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 3$ τότε η (2) αληθεύει για κάθε x , πραγματικό αριθμό.
- Εάν $\beta-3 < 0 \Leftrightarrow \beta < 3$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ όταν:
η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $2a$ όπου a θετικός ακέραιος, και:

$$E_{EZH\Theta} = E_{AB\Gamma\Delta} + 14$$



Λύση:

Έστω $x > 0$ (1) το μήκος της πλευράς $ΑΔ$.

Επειδή θέλουμε η περίμετρος του $ΑΒΓΔ$ να είναι $2α$, θα ισχύει ότι:

$$ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΑΒ = 2α$$

Επειδή $ΑΒΓΔ$ παραλλ/μμο θα έχουμε ότι: $ΑΔ = ΒΓ = x$ και $ΔΓ = ΑΒ$.

$$\text{Επομένως: } x + 2ΔΓ + x = 2α \Leftrightarrow ΔΓ = α - x > 0 \quad (2)$$

$$\text{Επίσης έχουμε: } E_{ΕΖΗΘ} = E_{ΑΒΓΔ} + 14 \Leftrightarrow (ΕΘ) \cdot (ΘΗ) = (ΑΔ) \cdot (ΔΓ) + 14 \Leftrightarrow$$

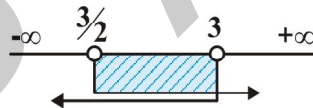
$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot (4+α-x) = x \cdot (α-x) + 14 \Leftrightarrow 4x + αx - x^2 + 8 + 2α - 2x = αx - x^2 + 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 - 2α \Leftrightarrow x = 3 - α \quad (3)$$

$$\text{Από τη σχέση (1) προκύπτει: } x > 0 \Leftrightarrow 3 - α > 0 \Leftrightarrow 3 - α > 0 \Leftrightarrow α < 3 \quad (4)$$

$$\text{Επίσης από την (2): } α - x > 0 \Leftrightarrow α - (3 - α) > 0 \Leftrightarrow 2α - 3 > 0 \Leftrightarrow α > \frac{3}{2} \quad (5)$$

Συναληθεύοντας (4), (5) έχουμε ότι $\frac{3}{2} < α < 3$



Επειδή $α$ θετικός ακέραιος είναι $α = 2$

Επομένως από τη (3) $\Leftrightarrow x = 3 - 2 = 1$ Άρα το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$ θα είναι:

$$E_{ΑΒΓΔ} = (ΑΔ)(ΔΓ) = x(α - x) = 1 \cdot (2 - 1) = 1 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

Παρατήρηση: Επειδή $ΑΔ = ΔΓ = 1$ το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο.

Παράδειγμα 10

Να βρείτε τρεις θετικούς ακέραιους, αν το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο του 14 και μικρότερο του 24, όταν ο δεύτερος είναι διπλάσιος απ' τον πρώτο και ο τρίτος μικρότερος απ' τον δεύτερο κατά 1.

Λύση:

Έστω x ο πρώτος απ' αυτούς τους αριθμούς, ο δεύτερος θα είναι τότε ο $2x$ ενώ ο τρίτος ο $2x - 1$.

$$\text{Έχουμε: } 14 < x + 2x + 2x - 1 < 24 \Leftrightarrow 14 < 5x - 1 < 24 \Leftrightarrow 14 + 1 < 5x < 24 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 < 5x < 25 \Leftrightarrow \frac{15}{5} < x < \frac{25}{5} \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

Επειδή x ακέραιος έχουμε ότι $x = 4$. Άρα οι αριθμοί είναι: 4, 8, 7.

Παράδειγμα 11

Να λυθούν οι ανισώσεις: i) $|x-1| < 3$ ii) $|x+2| < -2$ iii) $|x+7| \leq 0$

Λύση:

$$\text{i) } |x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-1 < 3 \Leftrightarrow -3+1 < x < 3+1 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

• **Γραφική ερμηνεία:**



$$\text{ii) } |x+2| < -2 \text{ αδύνατη, αφού } |x+2| \geq 0 \text{ και } -2 < 0.$$

$$\text{iii) } |x+7| \leq 0 \Leftrightarrow x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$$

Μέθοδος

Όταν έχουμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής $|A(x)| \leq \theta$ προσέχουμε τα εξής:

• Αν $\theta = 0$ τότε: $A(x) = 0$

• Αν $\theta < 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη

• Αν $\theta > 0$ τότε:

$$|A(x)| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq A(x) \leq \theta$$

Παράδειγμα 12

Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i) } |x+1| \geq 2$$

$$\text{ii) } |x+3| > -1$$

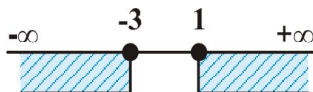
$$\text{iii) } \left| \frac{x-1}{x-2} \right| > 1$$

Λύση:

$$\text{i) } |x+1| \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \text{ ή } x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -3$$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, -3]$ ή στο διάστημα $[1, +\infty)$.

• **Γραφική ερμηνεία:**



$$\text{ii) } |x+3| > -1 \text{ αληθεύει για κάθε } x \text{ πραγματικό αριθμό.}$$

$$\text{iii) Καταρχήν πρέπει } |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Επειδή $|x-2| > 0$ πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με $|x-2|$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{|x-2|} > 1 &\Leftrightarrow |x-2| \cdot \frac{|x-1|}{|x-2|} > 1 \cdot |x-2| \Leftrightarrow |x-1| > |x-2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1|^2 > |x-2|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > (x-2)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 &> x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

με εξαίρεση το 2. Δηλαδή $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Μέθοδος:

Όταν έχουμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής $|A(x)| \geq \theta$ προσέχουμε τα εξής:

- Αν $\theta \leq 0$ τότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε x πραγματικό
- Αν $\theta > 0$ τότε:

$|A(x)| \geq \theta \Leftrightarrow A(x) \leq -\theta$ ή $A(x) \geq \theta$

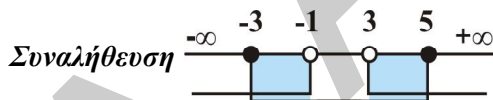
- Αν $|A(x)| \leq |B(x)|$ επειδή $|A(x)| \geq \theta$ και $|B(x)| \geq 0$ υψώνουμε στο τετράγωνο. Δηλαδή: $|A(x)|^2 \leq |B(x)|^2 \Leftrightarrow A^2(x) \leq B^2(x)$

Παράδειγμα 13

Να λυθεί η ανίσωση: $2 < |x-1| \leq 4$

Λύση:

- $|x-1| > 2 \Leftrightarrow x-1 > 2$ ή $x-1 < -2 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -1$
- $|x-1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$



Οπότε $-3 \leq x < -1$, ή $3 < x \leq 5$ δηλαδή οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $[-3, -1) \cup (3, 5]$.

Παράδειγμα 14

Να λυθεί η ανίσωση: $|2 - |x+1|| < 3$

Λύση:

Έχουμε $|2 - |x+1|| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2 - |x+1| < 3 \Leftrightarrow -5 < -|x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x+1| < 5$

Λύνουμε χωριστά καθεμία ανίσωση και έχουμε:

Μέθοδος:

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και κάνουμε συναλήθευση.

• $|x-1| > -1$ που αληθεύει για κάθε x .

• $|x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-4, 6)$.

Παράδειγμα 15

Να λυθεί η ανίσωση: $|x+1| - |x-2| > 2x$ (1)

Λύση:

• $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

• $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Πίνακας προσήμων

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+

Μέθοδος:

Όταν μέσα στις απόλυτες τιμές έχουμε διαφορετικές παραστάσεις του x για να λύσουμε την ανίσωση ακολουθούμε τα εξής:

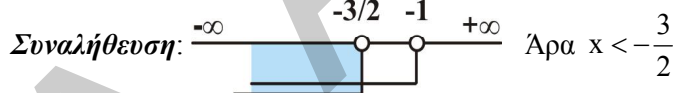
- Βρίσκουμε τις τιμές x που μηδενίζουν τις παραστάσεις μέσα στα απόλυτα
- Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων
- Διακρίνουμε περιπτώσεις
- Κάνουμε συναλήθευση
- Βρίσκουμε λύσεις

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $x < -1$ τότε $|x+1| = -x-1$, $|x-2| = -x+2$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$-x-1 - (-x+2) > 2x \Leftrightarrow -x-1+x-2 > 2x \Leftrightarrow -3 > 2x \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$$



2η περίπτωση: Αν $-1 \leq x < 2$ τότε $|x+1| = x+1$, $|x-2| = -x+2$

Η (1) γίνεται:

$$x+1 - (-x+2) > 2x \Leftrightarrow x+1+x-2 > 2x \Leftrightarrow -1 > 0 \text{ αδύνατο.}$$

3η περίπτωση: Αν $x \geq 2$ τότε $|x+1| = x+1$, $|x-2| = x-2$

$$\text{Η (1) γίνεται: } x+1 - (x-2) > 2x \Leftrightarrow x+1-x+2 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$



Παρατηρούμε ότι η ανίσωση δεν αληθεύει για καμία τιμή του x .

Απ'τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει μόνο όταν $x < -\frac{3}{2}$.

Άρα οι λύσεις ανήκουν στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Παράδειγμα 16

i) Να γράψετε την ανίσωση: $\alpha < x < \beta$ ως ανίσωση με απόλυτο.

ii) Να συμπληρωθεί ο πίνακας όπως δείχνει η πρώτη γραμμή.

Απόσταση	Απόλυτη τιμή	Ανίσωση
$d(x, 1) < 2$	$ x - 1 < 2$	$-1 < x < 3$
	$ x + 2 > 1$	
		$1 < x < 3$

Λύση:

i) Αν αφαιρέσουμε από τα μέλη της ανίσωσης τον αριθμό $\frac{\alpha + \beta}{2}$ έχουμε:

$$\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} < x - \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} < x - \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\beta - \alpha}{2} < x - \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow \left| x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| < \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (\beta > \alpha \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0)$$

ii) 2η γραμμή: $|x + 2| > 1 \Leftrightarrow x + 2 > 1 \text{ ή } x + 2 < -1 \Leftrightarrow x > -1 \text{ ή } x < -3$

3η γραμμή: Αφαιρούμε από τα μέλη της ανίσωσης τον αριθμό $\frac{1+3}{2} = 2$ (ερώτημα (i))

$$\text{Έχουμε: } 1 - 2 < x - 2 < 3 - 2 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow |x - 2| < 1$$

Επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Απόσταση	Απόλυτη τιμή	Ανίσωση
$d(x, 1) < 2$	$ x - 1 < 2$	$-1 < x < 3$
$d(x, -2) > 1$	$ x + 2 > 1$	$x > -1 \text{ ή } x < -3$
$d(x, 2) < 1$	$ x - 2 < 1$	$1 < x < 3$

Παράδειγμα 17

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις Σωστό ή Λάθος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή που θα δώσετε.

- i) Η ανίσωση $|x+1| \leq 0$ δεν αληθεύει για καμία τιμή του x .
- ii) Το πλήθος των ακέραιων που είναι λύσεις της ανίσωσης $|x-1| < 2004$ είναι 2006.
- iii) Η ανίσωση $|-|x|-1| \geq 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Λύση:**i) Λάθος**

Η ανίσωση $|x+1| \leq 0$ αληθεύει μόνο για: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

ii) Λάθος

$$|x-1| < 2004 \Leftrightarrow -2004 < x-1 < 2004 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2004+1 < x < 2004+1 \Leftrightarrow -2003 < x < 2005$$

Οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών -2003 και 2005 είναι:

$$\left\{ \underbrace{-2002, -2001, \dots, -1}_{2002}, 0, \underbrace{1, \dots, 2003, 2004}_{2004} \right\}$$

Άρα το πλήθος των ακέραιων είναι $2002+1+2004=4007$.

iii) Λάθος

$$\text{Επειδή } -|x|-1 < 0 \text{ τότε } |-|x|-1| = -(-|x|-1) = |x|+1$$

$$\text{Οπότε : } |-|x|-1| \geq 1 \Leftrightarrow |x|+1 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι όλο το $\mathbb{R}$ και όχι μόνο ο αριθμός 0.

Παράδειγμα 18

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις.

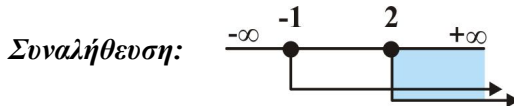
Κατόπιν να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i) } A = (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1})$$

$$\text{ii) } B = (\sqrt[3]{x-3} - \sqrt[3]{2}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x-3})^2 + \sqrt[3]{2(x-3)} + (\sqrt[3]{2})^2 \right]$$

Λύση:

i) Η Α ορίζεται όταν: $x - 2 \geq 0$ και $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ και $x \geq -1$



Άρα η Α ορίζεται όταν $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } A &= (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = \\ &= x - 2 - (x + 1) = x - 2 - x - 1 = -3 \end{aligned}$$

ii) Η Β ορίζεται όταν: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Έχουμε:

$$B = (\sqrt[3]{x-3} - \sqrt[3]{2}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x-3})^2 + \sqrt[3]{x-3} \cdot \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right] = (\sqrt[3]{x-3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = x - 3 - 2 = x - 5$$

Παράδειγμα 19

Να βρεθούν για ποια x ορίζονται οι παραστάσεις:

i) $A = \sqrt{2 - |x+1|}$

ii) $B = \sqrt{x} + \sqrt[3]{|x| - x} + \sqrt[4]{|x| + 2 - |x+2|}$

Λύση

i) Για να ορίζεται η Α πρέπει:

$$2 - |x+1| \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

ii) Πρέπει: $x \geq 0$ (1), $|x| - x \geq 0$ (2), και: $|x| + 2 - |x+2| \geq 0$ (3)

Επειδή $|x| \geq x$ η (2) ισχύει για κάθε x πραγματικό αριθμό.

Επίσης (ιδιότητα απολύτων) $|x+2| \leq |x| + |2| = |x| + 2 \Leftrightarrow |x| + 2 - |x+2| \geq 0$ οπότε και

η (3) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως για να ορίζεται η Β αρκεί: $x \geq 0$.

Ερωτήσεις Κατανόησης - Ασκήσεις για λύση

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).

Στήλη Α

1. $0 < x \leq 1$

2. $x \geq 0$

3. $x \leq -1$

4. $x \in [-1, 0]$

5. $x \in (-\infty, 1)$

6. $x \in [0, 1)$

Στήλη Β

α. $x \in (-\infty, -1]$

β. $x \leq 1$

γ. $x \in (0, 1]$

δ. $x \in (-\infty, 1]$

ε. $x \in (-\infty, -2]$

ζ. $-1 \leq x \leq 0$

στ. $x < 1$

η. $0 \leq x < 1$

θ. $x \in [0, +\infty)$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $\frac{x+3}{2} + \frac{x-2}{3} \geq \frac{x}{6}$, ii) $0,5(x+1) \leq \frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{4}$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{4} < \frac{x+1}{12} + \frac{x-2}{3}$

ii) $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x+2}{8} \geq \frac{x-1}{4} + \frac{6x}{16}$

4. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\frac{x-\lambda}{3} + \frac{2x+\lambda}{2} = 2\lambda - x + 3$ έχει λύση θετική.

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\frac{\lambda x - 1}{2} + \frac{\lambda x}{12} > \frac{\lambda + x}{6}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $4(x-1)^2 - (x-\lambda)^2 > 3(x+\lambda)^2 - 2\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

6. Για ποιές τιμές του a είναι αδύνατη η ανίσωση: $\frac{x-a}{3} + \frac{2x+1}{2} > ax+1$

7. Για ποιες τιμές του λ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x η ανίσωση:
 $\lambda(x-1)^2 + x(x-2\lambda) > x^2(\lambda+1) - 2(x+\lambda).$

8. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $\frac{x-1}{2} + x \leq \frac{3x+1}{3} < \frac{2x+1}{4} + x+2$

9. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x(x+1)+4 > x(x-3)+2 \text{ και } 3(x-1)+2 > 4(x-2)+x$$

10. Να λυθεί το σύστημα: $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$ $\frac{x+1}{4} - \frac{x+2}{8} \leq \frac{x}{8}$

11. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ο αριθμητής του κλάσματος είναι κατά 2 μεγαλύτερος απ'τον παρονομαστή και το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του $\frac{4}{3}$, να βρείτε το κλάσμα.

12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x| \leq 2$

ii) $|x+3| \leq 1$

iii) $|x+2| < -1$

iv) $|x-1| \leq 0$

13. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x| \geq 2$

ii) $|x+3| \geq 1$

iii) $|x+2| > -1$

iv) $|x-1| > 0$

14. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $1 < |x| < 2$

ii) $-1 \leq |x| \leq 3$

iii) $1 < |2x+1| < 3$

iv) $\frac{|x+1|}{|x+2|} \leq 1$

15. Ομοίως οι ανισώσεις:

i) $||x|-2| \leq 1$

ii) $||x+1|-1| > 3$

16. Ομοίως οι ανισώσεις:

i) $2(|x|-1) - 3(2-|x|) > 1$

ii) $\frac{2|1-x|}{3} - |x-1| \leq \frac{|1-x|-2}{3} + 1$

iii) $\frac{2|3x-1|-3}{2} + \frac{|3x-1|+1}{4} \geq |1-3x|$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{4x-12}{|x-3|} = x$

ii) $|x-1| + 2x - 1 - x = 3$

iii) $||x|+x| - ||x|-x| = |x-2|$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $|x-1|^2 - 2|x+2| = x^2 + 1$

ii) $\frac{x}{|x-1|} + \frac{2}{x-1} = 2$

iii) $|x^2 + 2x + 1| - 3|x-2| = x^2 + |2-x|$

228.

Ανισώσεις 1ου βαθμού

19. Ομοίως οι εξισώσεις:

i) $|x+1| - |x-1| = 3$

ii) $|2x-1| - 3|x+2| + 2|x-4| = 3-5x$

20. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x+1| - |x-2| \leq 1$

ii) $|x-3| \geq 2x-1$

21. Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 2$

22. Αν X ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω και $|P(X)+2| - |P(X)-3| = 8\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

να δείξετε ότι $|\lambda| \leq \frac{1}{8}$.