

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 3.

- α) Τι ονομάζουμε τριώνυμο 2ου βαθμού ή απλά τριώνυμο;
 β) Τι ονομάζουμε διακρίνουσα του τριωνύμου;
 γ) Τι ονομάζουμε ρίζες του τριωνύμου;

Απάντηση:

- α) Τριώνυμο 2ου βαθμού η απλά τριώνυμο λέγεται η παράσταση: $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.
- β) Διακρίνουσα του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, λέγεται η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.
- γ) Ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, λέγονται οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Θεωρία 4.

Έστω το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\Delta > 0$ τότε $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του.

β) Αν $\Delta = 0$ τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ όπου x_0 η διπλή ρίζα του.

γ) Αν $\Delta < 0$ τότε $ax^2 + bx + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

Απόδειξη:

$$ax^2 + bx + \gamma = a\left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{\beta}{2a}x + \frac{\gamma}{a}\right) =$$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \left[x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] = \\
 &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right] \quad (1)$$

α) Αν $\Delta > 0$. Τότε $\sqrt{\Delta^2} = \Delta$ και το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)^2 \right] = \\
 &= \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \alpha \left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \alpha (x - x_1)(x - x_2)
 \end{aligned}$$

β) Αν $\Delta = 0$. Τότε το τριώνυμο έχει μια ρίζα διπλή την $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Η (1) γίνεται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{0}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha \left[x - \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) \right]^2 = \alpha (x - x_0)^2$$

γ) Αν $\Delta < 0$. Τότε $|\Delta| = -\Delta$ (2). Η (1) γίνεται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2} \right] \stackrel{(2)}{=} \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \begin{cases} \alpha (x - x_1)(x - x_2) & \alpha \nu \Delta > 0 \\ \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha (x - x_0)^2 & \alpha \nu \Delta = 0 \\ \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right] & \alpha \nu \Delta < 0 \end{cases}$$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

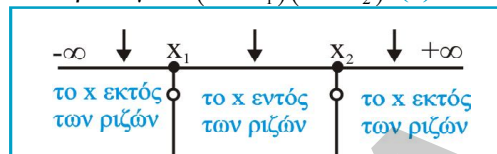
Θεωρία 5.

Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)=ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

1η περίπτωση $\Delta > 0$

Επειδή $\Delta > 0$ θα είναι $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$ (1)



1) Έστω $x < x_1$ τότε $\begin{cases} x < x_1 \\ x < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$
εκτός των ριζών

Άρα $(x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \text{ αν } a > 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0 \text{ αν } a > 0 \\ f(x) < 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \text{ ομόσημο του } a$

2) Έστω $x > x_2$ τότε $\begin{cases} x > x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$
εκτός των ριζών

Άρα $(x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \text{ αν } a > 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0 \text{ αν } a > 0 \\ f(x) < 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \text{ ομόσημο του } a$

3) Έστω $x_1 < x < x_2$ τότε $\begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$
εντός των ριζών

Άρα $(x - x_1) \cdot (x - x_2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \text{ αν } a > 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) < 0 \text{ αν } a > 0 \\ f(x) > 0 \text{ αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \text{ ετερόσημο του } a$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

4) Αν $x = x_1$ τότε $f(x_1) = 0$ και αν $x = x_2$ τότε $f(x_2) = 0$ (διότι τα x_1, x_2 είναι ρίζες, του τριωνύμου $f(x)$)

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

x	$-\infty$ (εκτός ριζών)	x_1 (εντός ριζών)	x_2 (εκτός ριζών)	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	ετερόσημο του α	ομόσημο του α	

2η περίπτωση: $\Delta = 0$

Επειδή $\Delta = 0$ θα είναι $ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$ (1)

1) Αν $x \neq -\frac{\beta}{2a}$ (δηλαδή το $x \neq x_0$ όπου x_0 η διπλή ρίζα) τότε:

$$\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 > 0 & \text{αν } a > 0 \\ a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 < 0 & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{αν } a > 0 \\ f(x) < 0 & \text{αν } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \text{ ομόσημο του } a$$

2) Αν $x = -\frac{\beta}{2a} = x_0$ τότε $ax_0^2 + bx_0 + \gamma = 0$ (διότι το x_0 ρίζα του τριωνύμου $f(x)$)

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

x	$-\infty$	$x_0 = -\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3η περίπτωση: $\Delta < 0$

$$\text{Επειδή } \Delta < 0 \text{ θα είναι } ax^2 + bx + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right] \quad (1)$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή

Ανισώσεις 2ου βαθμού

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right] > 0 & \text{αν } \alpha > 0 \\ \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right] < 0 & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{αν } \alpha > 0 \\ f(x) < 0 & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \text{ ομόσημο του } \alpha$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε :

X	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	

Γενικό Συμπέρασμα

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του a μόνο στην περίπτωση που $\Delta > 0$ και το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών.
Σ' όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι ομόσημο του a . (εκτός από τις ρίζες όπου το τριώνυμο μηδενίζεται).

Θεωρία 6.

Πώς λύνουμε ανισώσεις δευτέρου βαθμού; Δηλαδή ανισώσεις της μορφής:

$$ax^2 + bx + \gamma > 0 \quad (1), \quad ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \quad (2),$$

$$ax^2 + bx + \gamma < 0 \quad (3), \quad ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \quad (4)$$

Απάντηση:

Βρίσκουμε το πρόσημο του $ax^2 + bx + \gamma$ και με τη βοήθεια του πίνακα προσημών βρίσκουμε εκείνα τα x που αληθεύει η κάθε μια από τις τέσσερις παραπάνω ανισώσεις.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Θεωρία 7.

Ποιες είναι οι συνθήκες ώστε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ να είναι:

α) Θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να διατηρεί το ίδιο πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απάντηση:

α) Θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a > 0$

β) Αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a < 0$

γ) Διατηρεί το ίδιο πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a \neq 0$

Θεωρία 8.

Ποιες είναι οι συνθήκες ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) $ax^2 + bx + \gamma > 0$

β) $ax^2 + bx + \gamma \geq 0$

γ) $ax^2 + bx + \gamma < 0$

δ) $ax^2 + bx + \gamma \leq 0$

Απάντηση:

α) $ax^2 + bx + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a > 0$

β) $ax^2 + bx + \gamma \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $a > 0$

γ) $ax^2 + bx + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $a < 0$

δ) $ax^2 + bx + \gamma \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $a < 0$.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 20 (πολλαπλής επιλογής)

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, έχει ρίζες τις $x_1 = -\frac{1}{3}$ και $x_2 = \frac{1}{2}$ και η παραγοντοποιημένη του μορφή είναι η $-(3x + 1)(1 - 2x)$.

Τότε το a είναι ίσο με: 3, 2, 6, -6, -2. Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

Απάντηση:

$a = 6$ Αιτιολόγηση:

1ος τρόπος:

Αφού οι ρίζες είναι $-\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ το $ax^2 + bx + \gamma$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax^2 + bx + \gamma = a \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Όμως από υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + \gamma &= -(3x + 1)(1 - 2x) = (3x + 1)(2x - 1) = \left[3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \right] \cdot \left[2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 6 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $a = 6$

2ος τρόπος:

Από υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + \gamma &= -(3x + 1)(1 - 2x) \Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma = -(3x - 6x^2 + 1 - 2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma = 6x^2 - x - 1 \Leftrightarrow a = 6, b = -1, \gamma = -1. \text{ Άρα } a = 6 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 21 (Σωστό - Λάθος)

Έστω ότι το τριώνυμο $3x^2 + bx + \gamma$, παίρνει τη μορφή $3(x - \kappa)^2$. Τότε $\Delta > 0$.

Σωστό ή Λάθος; Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

Απάντηση:

Λάθος.

Αιτιολόγηση: Επειδή το τριώνυμο γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο επί το $a = 3$ θα έχει $\Delta = 0$.

Παράδειγμα 22

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{6x^3 - x^2 - x}{4x^2 - 4x + 1}$

Λύση:

• Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή: $6x^3 - x^2 - x = x(6x^2 - x - 1) \quad (1)$

Για το τριώνυμο $6x^2 - x - 1$, έχουμε: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

$$\text{Άρα: } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Άρα: } 6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 6x^3 - x^2 - x = 6x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad (3)$$

- Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή $4x^2 - 4x + 1$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$$\text{Άρα: } x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \quad \text{Άρα: } 4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (4)$$

$$\text{Έτσι η } A \stackrel{(3)}{\stackrel{(4)}}{=} \frac{6x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3x\left(x + \frac{1}{3}\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Παράδειγμα 23

Να απλοποιηθεί το κλάσμα

$$K = \frac{(x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 - x)^2}{(x^3 - 1) - (x^2 + x - 2)}$$

Λύση:

- Ο αριθμητής Α είναι διαφορά 2 τετραγώνων:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 - x)^2 = (x^2 + 3x - 4 - x^2 + x)(x^2 + 3x - 4 + x^2 - x) = \\ &= (4x - 4)(2x^2 + 2x - 4) = 4(x - 1) \cdot 2(x^2 + x - 2) = 8(x - 1)(x^2 + x - 2) \quad (1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $(x^2 + x - 2)$, έχει ρίζες: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

$$\text{Άρα: } x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} A = 8(x - 1)(x + 2)(x - 1) \Leftrightarrow A = 8(x - 1)^2(x + 2) \quad (3)$$

- Ο παρονομαστής Β γίνεται:

$$\begin{aligned} B &= (x^3 - 1) - (x^2 + x - 2) \stackrel{(2)}{=} (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 2)(x - 1) = (x - 1)[(x^2 + x + 1) - (x + 2)] = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - x - 2) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } B = (x - 1)^2(x + 1) \quad (4) \quad \text{Άρα } K \stackrel{(3)}{\stackrel{(4)}}{=} \frac{8(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{8(x + 2)}{x + 1}$$

Παράδειγμα 24

$$\text{Να απλοποιηθεί η παράσταση: } K = \frac{4x^4 - 13a^2x^2 + 9a^4}{2x^2 + ax - 3a^2}$$

Ανισώσεις 2ου βαθμού**Λύση:**

- Ο αριθμητής $A = 4x^4 - 13\alpha^2x^2 + 9\alpha^4$, για $x^2 = y \geq 0$ (1), γίνεται: $A = 4y^2 - 13\alpha^2y + 9\alpha^4$.
 $\Delta = (-13\alpha^2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9\alpha^4 = 169\alpha^4 - 144\alpha^4 = 25\alpha^4 \geq 0$

$$\text{Άρα: } y_{1,2} = \frac{13\alpha^2 \pm \sqrt{25\alpha^4}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{13\alpha^2 + 5\alpha^2}{8} = \frac{18\alpha^2}{8} = \frac{9\alpha^2}{4} \\ y_2 = \frac{13\alpha^2 - 5\alpha^2}{8} = \frac{8\alpha^2}{8} = \alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{και επομένως } A &= 4y^2 - 13\alpha^2y + 9\alpha^4 = 4\left(y - \frac{9\alpha^2}{4}\right)\left(y - \alpha^2\right)^{(1)} = 4\left(x^2 - \frac{9\alpha^2}{4}\right)\left(x^2 - \alpha^2\right) = \\ &= 4\left(x - \frac{3\alpha}{2}\right)\left(x + \frac{3\alpha}{2}\right)(x - \alpha)(x + \alpha) \quad (2) \end{aligned}$$

- Ο παρονομαστής $2x^2 + \alpha x - 3\alpha^2$ έχει: $\Delta = \alpha^2 - 4 \cdot 2(-3\alpha^2) = \alpha^2 + 24\alpha^2 = 25\alpha^2 \geq 0$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{25\alpha^2}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\alpha + 5\alpha}{4} = \frac{4\alpha}{4} = \alpha \\ x_2 = \frac{-\alpha - 5\alpha}{4} = -\frac{6\alpha}{4} = -\frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\text{και επομένως } 2x^2 + \alpha x - 3\alpha^2 = 2(x - \alpha)\left(x + \frac{3\alpha}{2}\right) \quad (3)$$

$$\text{Άρα } K = \frac{(2) 4\left(x - \frac{3\alpha}{2}\right)\left(x + \frac{3\alpha}{2}\right)(x - \alpha)(x + \alpha)}{(3) 2(x - \alpha)\left(x + \frac{3\alpha}{2}\right)} = 2\left(x - \frac{3\alpha}{2}\right)(x + \alpha)$$

Παράδειγμα 25

Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $2x^2 - (\lambda - 1)x + \frac{\lambda^2}{8} - 3\lambda + 1$:

- α) Παραγοντοποιείται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων
 β) Είναι τέλειο τετράγωνο. Ποιο είναι αυτό; γ) Δεν παραγοντοποιείται

Λύση:

$$\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4 \cdot 2 \left(\frac{\lambda^2}{8} - 3\lambda + 1 \right) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 24\lambda - 8 = 22\lambda - 7$$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

α) Το τριώνυμο για να παραγοντοποιείται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 22\lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow 22\lambda > 7 \Leftrightarrow \lambda > \frac{7}{22}$$

β) Επειδή $\alpha = 2 > 0$ για να είναι τέλει τετράγωνο πρέπει: $\Delta = 0 \Leftrightarrow 22\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{22}$.

Για $\lambda = \frac{7}{22}$ η διπλή ρίζα είναι:

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{-(\lambda-1)}{2 \cdot 2} = \frac{\frac{7}{22} - 1}{4} = \frac{\frac{7}{22} - \frac{22}{22}}{4} = \frac{-\frac{15}{22}}{4} = -\frac{15}{88}$$

$$\text{Άρα: } 2x^2 - (\lambda-1)x + \frac{\lambda^2}{8} - 3\lambda + 1 = 2\left(x + \frac{15}{88}\right)^2 = \left[\sqrt{2}\left(x + \frac{15}{88}\right)\right]^2$$

γ) Το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{7}{22}$

Παράδειγμα 26

Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ

A) α) το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) η ανίσωση $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B) γ) το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) η ανίσωση $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6 < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ) το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2 + 2(2\lambda-3)x + 5\lambda-6$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(2\lambda-3)]^2 - 4(\lambda-2)(5\lambda-6) = 4(2\lambda-3)^2 - 4(5\lambda^2 - 6\lambda - 10\lambda + 12) = \\ &= 4(4\lambda^2 - 12\lambda + 9) - 4(5\lambda^2 - 16\lambda + 12) = 16\lambda^2 - 48\lambda + 36 - 20\lambda^2 + 64\lambda - 48 = -4\lambda^2 + 16\lambda - 12 \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή } \Delta = -4\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της

$$\Delta = -4\lambda^2 + 16\lambda - 12. \text{ Οι ρίζες}$$

του τριωνύμου $-4\lambda^2 + 16\lambda - 12$

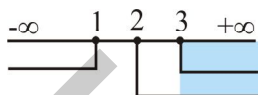
είναι οι: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$

Άρα το πρόσημο της Δ είναι:

λ	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$\Delta = -4\lambda^2 + 16\lambda - 12$	-	○	○	-
		-	+	

Ανισώσεις 2ου βαθμού

A) α) Το τριώνυμο $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{και} \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda^2 + 16\lambda - 12 < 0 \\ \text{και} \\ \lambda - 2 > 0 \end{cases} \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ \text{και} \\ \lambda > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow \lambda > 3$$

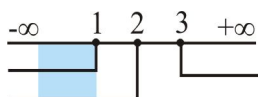
β) Η ανίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6 > 0$

$$\text{αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \text{ και} \\ \alpha > 0 \end{cases} \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \lambda > 3$$

Παρατήρηση

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα δύο προηγούμενα υποερωτήματα α) και β) του Α) ερωτήματος είναι ισοδύναμα, δηλαδή, έχουν το ίδιο ζητούμενο.

B) γ) Το τριώνυμο $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{και} \\ \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda^2 + 16\lambda - 12 < 0 \\ \text{και} \\ \lambda - 2 < 0 \end{cases} \stackrel{(β)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ \text{και} \\ \lambda < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow \lambda < 1$$

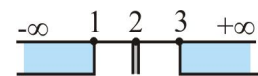
δ) Η ανίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6 < 0$

$$\text{αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{και} \\ \alpha < 0 \end{cases} \stackrel{(γ)}{\Leftrightarrow} \lambda < 1$$

Παρατήρηση

Και εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα υποερωτήματα γ) και δ) του Β) ερωτήματος είναι ισοδύναμα, δηλαδή έχουν το ίδιο

Γ) Το τριώνυμο $(\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο για όλα τα

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{και} \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda^2 + 16\lambda - 12 < 0 \\ \text{και} \\ \lambda - 2 \neq 0 \end{cases} \stackrel{(ι)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ \text{και} \\ \lambda \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Παράδειγμα 27

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-x^2 + (2\lambda - 1)x + 3\lambda + 10 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4(-1)(3\lambda + 10) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 4(3\lambda + 10) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 12\lambda + 40 = 4\lambda^2 + 8\lambda + 41$$

Η Διακρίνουσα είναι τριώνυμο το οποίο έχει διακρίνουσα

$$\Delta_1 = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 41 \Leftrightarrow \Delta_1 = 64 - 656 = -592 < 0$$

Δηλαδή η διακρίνουσα Δ_1 του τριωνύμου $\Delta = 4\lambda^2 + 8\lambda + 41$ είναι

$\Delta_1 < 0$ άρα το τριώνυμο $\Delta = 4\lambda^2 + 8\lambda + 41$ είναι ομόσημο του $a = 4 > 0$ για κάθε

$\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα $\Delta > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 28

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda + 4)x^2 - (\lambda - 3)x - \frac{\lambda - 3}{4} = 0$, $\lambda \neq -4$

α) Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες

γ) Δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Η ίδια άσκηση θα μπορούσε να ζητηθεί ως εξής:

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να διερευνήσετε το είδος και το πλήθος

των ριζών της εξίσωσης $(\lambda + 4)x^2 - (\lambda - 3)x - \frac{\lambda - 3}{4} = 0$, $\lambda \neq -4$

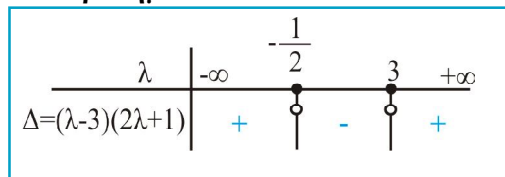
Λύση:

Την απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα θα μας την δώσει το πρόσημο της διακρίνουσας Δ .

$$\text{Έχουμε: } \Delta = (\lambda - 3)^2 + 4(\lambda + 4) \frac{\lambda - 3}{4} \Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 3)^2 + (\lambda + 4)(\lambda - 3)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 3)(\lambda - 3 + \lambda + 4) \Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 3)(2\lambda + 1)$$

Οι ρίζες της Δ είναι οι αριθμοί 3, και $-\frac{1}{2}$.

Ανισώσεις 2ου βαθμού**Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:**

Έτσι έχουμε:

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty). \text{ Όμως } \lambda \neq -4 \text{ Άρα: } \lambda \in (-\infty, -4) \cup (-4, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ ή $\lambda = 3$ **γ)** Η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\frac{1}{2}, 3)$

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για λύση

22. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω πολωνύμων:

α) $-4x + 2$

β) $3x + 5$

γ) $-x^2 + 3x - 2$

δ) $-4x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}$

ε) $3x^2 - 2x + 1$

23. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2 - 2x + 3 > 0$

β) $3x^2 - 13x + 10 \leq 0$

γ) $-x^2 + 2x + 3 > 0$

δ) $-6x^2 + 11x - 4 \leq 0$

ε) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 < 0$

24. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(x^2 - 9x + 14)(x - 4) < 0$

β) $(x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 1)(2x - 1) > 0$

γ) $(2x^2 - 5x - 7)(x^2 - 1)(3x^2 + 7) < 0$

25. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\kappa - 1)x^2 - 2(\kappa - 3)x - \kappa + 3 = 0$

α) έχει μόνο μία ρίζα

β) έχει μία ρίζα διπλή

γ) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

δ) δεν έχει ρίζες πραγματικές

ε) έχει δύο ρίζες πραγματικές

26. Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\mu - 2)x^2 - 2(2\mu + 3)x + 2\mu - 18$

α) είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) έχει ρίζες ετερόσημες

27. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - \lambda(10x - 7) - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

28. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο: $(\lambda - 2)x^2 - (\lambda - 1)x - 2\lambda$ έχει ρίζες πραγματικές;

29. Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(3\mu - 2)x^2 - 6\mu x + 6\mu - 3$ έχει δύο ρίζες θετικές.

30. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

α) $(\lambda + 1)x^2 + 2(2\lambda - 1)x + 5\lambda + 1 < 0$

β) $\lambda x^2 + 4(\lambda + 1)x - 2(\lambda + 1) > 0$

31. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου δείξτε ότι $\alpha^2 x^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)x + \beta^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32. Ν'απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{(x^2 - 6x + 9) \cdot (4x^2 - 9) \cdot (2x^2 - 2x - 12) \cdot (x^2 - \alpha x - 6\alpha^2)}{(x^2 + x - 12) \cdot (x - 3) \cdot (4x^2 - 12x + 9) \cdot (x^2 - 7\alpha x + 12\alpha^2)}$$

33. Ν'απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{x^3 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x}{\alpha x^2 - \alpha^3}$

34. Ν'απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{(x^2 - \alpha^2)(x^2 + \alpha^2) \cdot [(x - \alpha)^2 - \beta^2]}{(2x^2 + \alpha x - 3\alpha^2)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2)}$

35. Ν'απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{(x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 - x)^2}{(x^3 - 1) - (x^2 + x - 2)}$

36. Ν'απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{(x^4 - 5x^2 + 4)^2}{(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 2)^2}$

37. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $3x^2 + (2\lambda - 1)x + \frac{1}{3}\lambda^2 - \lambda + 1$:

α) Παραγοντοποιείται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

β) Είναι τέλειο τετράγωνο. Ποιο είναι αυτό;

γ) Δεν παραγοντοποιείται.