

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

- α) Τι ονομάζεται σύνολο;
- β) Τι σημαίνουν τα σύμβολα $\in, \notin$;
- γ) Αναφέρατε παραδείγματα συνόλων.

Απάντηση:

α) Σύνολο ονομάζεται κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

• Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη του συνόλου**.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Σε ένα **καλώς ορισμένο σύνολο**, τα στοιχεία του εμφανίζονται μόνο μία φορά.

β) Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του A , γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε “το x ανήκει στο A ”, ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A , γράφουμε $x \notin A$.

- γ) **Παραδείγματα συνόλων:**
- N:** Το σύνολο των φυσικών αριθμών
 - Z:** Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
 - Q:** Το σύνολο των ρητών αριθμών
 - R:** Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Θεωρία 2.

Πώς παριστάνεται ένα σύνολο;

Απάντηση:

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε τους εξής τρόπους:

i) Με αναγραφή

Γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου, μεταξύ δύο αγκίστρων, από μία φορά το καθένα χωρίζοντάς τα με κόμμα. π.χ. $A = \{3, 5, 7\}$,
 $B = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, $\Gamma = \{5, 10, 15, \dots\}$

ii) Με περιγραφή

Περιγράφουμε τα στοιχεία του συνόλου με μία χαρακτηριστική ιδιότητα:

$I = \{x \in \Omega / x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$

Παράδειγμα: $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 5\}$

Το σύνολο A , είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών που περιέχονται ανάμεσα στο 2 και το 5. Δηλαδή, με αναγραφή $A = \{3, 4\}$

Θεωρία 3.

α) Πότε ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B ;

β) Ποιες ιδιότητες ισχύουν για το σύμβολο $\subseteq$;

Απάντηση:

α) Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$. Για παράδειγμα στα σύνολα που γνωρίζουμε, ισχύει: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

β) Οι ιδιότητες που ισχύουν για το σύμβολο $\subseteq$ είναι:

- i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A , (*ανακλαστική*)
- ii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$, (*μεταβατική*)
- iii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$, (*αντισυμμετρική*)

Θεωρία 4.

Πότε δύο σύνολα A, B είναι ίσα;

Απάντηση:

Δύο σύνολα A και B είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε: $A = B$. Ισχύει ότι $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω, για να δείξουμε ότι $A = B$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντίστροφα, κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A .

Θεωρία 5.

Ποιο σύνολο ονομάζεται κενό;

Απάντηση:

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει καθόλου στοιχεία. Συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$. Δεχόμαστε ότι το **κενό σύνολο είναι υποσύνολο** κάθε συνόλου και είναι μοναδικό.

Παράδειγμα: $A = \{x \in \mathbb{N} / x + 1 = 0\}$. Το σύνολο A δεν έχει κανένα στοιχείο γιατί η λύση της εξίσωσης $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{N}$.

Θεωρία 6.

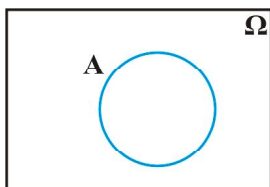
Τι είναι διάγραμμα Venn;

Απάντηση:

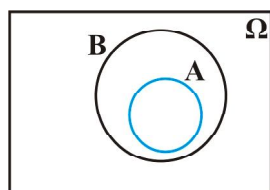
Διάγραμμα Venn είναι μία εποπτική παρουσίαση των συνόλων που γίνεται με κλειστές γραμμές. Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω . Το βασικό σύνολο σε διάγραμμα Venn συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου:



Κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου, παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης:



- Όταν $A \subseteq B$, η παράσταση σε διάγραμμα Venn γίνεται ως εξής:



Θεωρία 7.

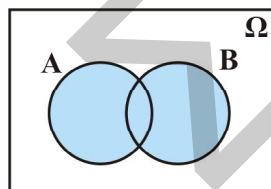
Τι ονομάζουμε: α) ένωση δύο συνόλων
 β) τομή δύο συνόλων
 γ) συμπλήρωμα ενός συνόλου

Απάντηση:

α) Ένωση δύο συνόλων A, B ονομάζουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία των A, B .

Συμβολίζουμε $A \cup B$, και ισχύει:

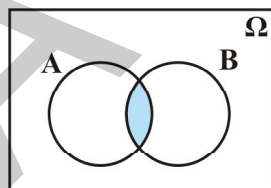
$$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



β) Τομή δύο συνόλων A, B λέγεται το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά τους στοιχεία

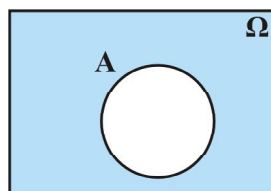
Συμβολίζουμε $A \cap B$ και ισχύει:

$$A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$$



γ) Έστω Ω το βασικό σύνολο και A ένα οποιοδήποτε σύνολο. Συμπλήρωμα του A ονομάζουμε το σύνολο, που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A και **συμβολίζεται** A' . Δηλαδή:

$$A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$$



Σημείωση:

Στα παραπάνω διαγράμματα Venn το μπλέ τμήμα δείχνει το σύνολο που αναφερόμαστε.

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

i) Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \alpha, \beta\}$

α) $\alpha \in A$, β) $4 \in A$, γ) $\{1, 2\} \in A$, δ) $\beta \notin A$

ii) $\{4\} = 4$ iii) $4 \in \{4\}$ iv) $\emptyset = \{\emptyset\}$ v) $\emptyset' = \Omega$ vi) $\Omega' = \emptyset$

Απάντηση:

i) (α) Σωστό: α είναι στοιχείο του A .

(β) Λάθος: $4 \notin A$

(γ) Λάθος: $\{1, 2\} \subseteq A$.

(δ) Λάθος: β είναι στοιχείο του A , δηλαδή $\beta \in A$.

ii) Λάθος: Ένα σύνολο δεν είναι ίσο με αριθμό.

iii) Σωστό: Ο αριθμός 4 είναι στοιχείο του συνόλου $\{4\}$.

iv) Λάθος: Το κενό σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο $\{\emptyset\}$ περιέχει ένα στοιχείο, το $\emptyset$.

v) Σωστό: Το συμπλήρωμα του $\emptyset$ είναι το βασικό σύνολο Ω .

vi) Σωστό: Το συμπλήρωμα του βασικού συνόλου Ω είναι το $\emptyset$.

Παράδειγμα 2

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 4, 5\}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) α. $A \subseteq B$, β. $B \subseteq \Omega$, γ. $B \subseteq A$ iii) α. $A \cap B = \{3\}$ β. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ii) α. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ β. $A \cup B = \{3\}$ γ. $A \cap B = \{6\}$ δ. $A \cap B = \emptyset$

γ. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ δ. $A \cup B = \{6\}$ iv) α. $A' = \{3, 4, 5\}$ β. $A' = \{4, 5, 6\}$
γ. $A' = \emptyset$ δ. $A' = \{1, 2, 3\}$

Απάντηση:

i) Όυ όδύ όϊ (â): Το Ω είναι βασικό σύνολο οπότε $B \subseteq \Omega$.

ii) Σωστό το (γ): Η ένωση δύο συνόλων αποτελείται από τα κοινά και μη κοινά στοιχεία τους, μια φορά το καθένα.

iii) Σωστό τα (α): Η τομή δυο συνόλων αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία.

iv) Σωστό τα (β): Το A' περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A .

Παράδειγμα 3

Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα.

i) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 6\}$ ii) $B = \{x \in \mathbb{N} / |x+1| = 2\}$ iii) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \leq -1\}$

Λύση:

i) Είναι $2 < x \leq 6$ και επειδή $x \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι $x = 3$ ή 4 ή 5 ή 6 . Άρα: $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

ii) Έχουμε $|x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2$ ή $x+1 = -2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -3$

Επειδή $x \in \mathbb{N}$ η λύση $x = -3$ δεν είναι στοιχείο του B . Άρα $B = \{1\}$.

iii) Επειδή $|x+1| \geq 0$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|x+1| \leq -1$ Άρα $\Gamma = \emptyset$.

Παράδειγμα 4

Να γραφούν με περιγραφή τα σύνολα: i) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ii) $B = \{1, 2\}$

Λύση:

i) Το A γράφεται: $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 2\}$ ή μπορεί να γραφεί: $A = \{x \in \mathbb{R} / (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) = 0\}$

ii) Το B γράφεται: $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 2\}$ ή μπορεί να γραφεί: $B = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x-2) = 0\}$

Σημείωση:

Παρατηρούμε ότι όταν έχουμε ένα σύνολο με αναγραφή δε γράφεται με έναν μόνο τρόπο ως σύνολο με περιγραφή. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 5

Να εξετάσετε αν $A \subseteq B$ όπου: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / |x-2| < 1\}$

Λύση:

Το σύνολο A είναι το $\emptyset$ αφού η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν αληθεύει για κανένα $x \in \mathbb{R}$.

Για το σύνολο B έχουμε: $|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$. Άρα: $B = \{2\}$.

Επειδή το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου έχουμε $A \subseteq B$.

Παράδειγμα 6

Αν $A \subseteq B$, $B \subseteq \Gamma$, $\Gamma \subseteq A$ να αποδείξετε ότι $A = B = \Gamma$.

Απόδειξη:

Αφού $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ (1)

Όμως έχουμε $\Gamma \subseteq A$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει $A = \Gamma$ (3)

Επίσης $A \subseteq B$, $B \subseteq \Gamma$ οπότε $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ λόγω της (3), άρα και $A = B$ (4)

Από (3), (4) έχουμε: $A = B = \Gamma$

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για Λύση

1. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- i) $\{0, 2, 4, \dots\} = \{x / x = 2v, v \in \mathbb{N}\}$ ()
- ii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = B$ ()
- iii) $(\emptyset')' = \Omega$ ()
- iv) $(\Omega')' = \emptyset'$ ()
- v) $\emptyset = \{0\}$ ()

2. Ομοίως για τις προτάσεις:

- i) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ()
- ii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$ ()
- iii) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ ()
- iv) $x = \{x\}$ ()
- v) $\emptyset \in \{\{\}\}$ ()

3. Ομοίως για τις προτάσεις:

- i) $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ ()
- ii) Αν $x^2 - 1 = 0$ τότε το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι $A = \{-1, 1\}$ ()
- iii) Αν x ακέραιος και $|x| \leq 1$ τότε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης είναι $A = \{-1, 0, 1\}$ ()
- iv) Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, \dots, 10\}$ τότε:
 - $A \subseteq B$ ()
 - $A' = B$ ()
 - $A \cup B = \emptyset$ ()
 - $A \cap B = \emptyset$ ()

4. Να επιλέξετε το γράμμα της σωστής απάντησης:

- i) Αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ τότε το σύνολο $A \cup B$ είναι ίσο με:
 - α) $\{1, 2, 3\}$ β) $\{3, 4\}$ γ) $\{1, 2, 3, 3, 4\}$ δ) $\{1, 2, 3, 4\}$
- ii) Η τομή των συνόλων των λύσεων των εξισώσεων $x^2 + 1 = 0$ και $x - 1 = 0$ είναι ίση με:
 - α) $\emptyset$ β) $\{1\}$ γ) $\{-1\}$ δ) $\{0\}$

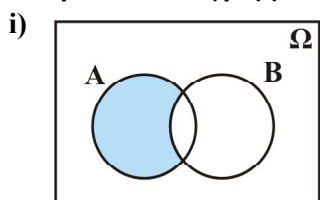
iii) Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x(x^2-4)(x^2+4)(x^3+8)=0$ είναι ίσο με:

α) $A=\{0,2\}$ β) $A=\{-2,0,2\}$ γ) $A=\{-2,0\}$ δ) $A=\{-2,0,\sqrt[3]{2}\}$

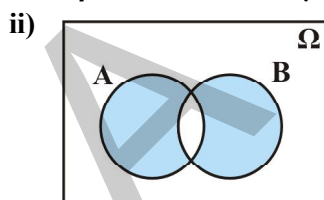
iv) Το σύνολο $A=\{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 - 3 < 0\}$ σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων είναι:

α) $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$ β) $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$
 γ) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ δ) $(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$

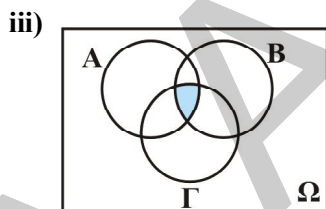
5. Στα παρακάτω διαγράμματα Venn ποιο σύνολο παριστάνει το σκιασμένο τμήμα;



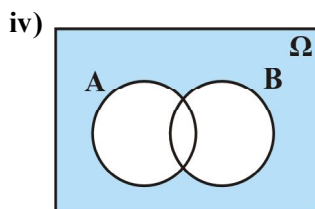
α) $A \cap B$,
 β) $A \cap B'$
 γ) $A' \cap B$
 δ) $A' \cap B'$



α) $A \cap B$,
 β) $A \cup B$
 γ) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$
 δ) $(A \cup B') \cap A$



α) $A \cup B \cup \Gamma$,
 β) $A \cap B \cap \Gamma$
 γ) $(A \cup B) \cup (B \cap \tilde{A})$
 δ) $(A \cup B) \cap \Gamma$



α) $(A \cup B)'$
 β) $(A \cap B)'$
 γ) $A \cup (B \cap \Gamma)$
 δ) $A \cap \Omega$

6. Να παρασταθούν με αναγραφή τα σύνολα:

α) $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ψηφίο του αριθμού } 122334\}$

β) $B=\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$

γ) $\Gamma=\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$

7. Ομοίως τα σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{Z} / x^4 + 27x = 0\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / |x+2| = 1\}$

8. Να παρασταθούν με περιγραφή τα σύνολα:

α) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

β) $B = \{-2, 2\}$

γ) $\Gamma = \{0, 1, 2, 3\}$

9. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι $\emptyset$;

α) $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3 \text{ και } 2x = 8\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3 \text{ ή } 2x = 8\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6}\}$

δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = 5(\frac{x}{6} + 1)\}$

10. Δίνονται τα σύνολα: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθούν:

α) Η σχέση του συνόλου A με το σύνολο B.

β) Τα $A \cup B$, $A \cap B$

γ) Το συμπλήρωμα του A ως προς το σύνολο αναφοράς B

11. Να βρεθούν όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$

12. Να προσδιορισθεί ο α, ώστε να είναι ίσα τα σύνολα $A = \{1, a^2\}$, $B = \{a, 1\}$