

1. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί, $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, να αποδείξετε ότι:
 - i) $2\alpha + \gamma < 2\beta + \delta$
 - ii) $\alpha - \delta < \beta - \gamma$
 - iii) $\delta - \alpha > \gamma - \beta$
2. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί, $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$, να αποδείξετε ότι:
 - i) $3\alpha + \frac{1}{2}\delta < 3\beta + \frac{1}{2}\gamma$
 - ii) $\alpha - \gamma < \beta - \delta$
 - iii) $2\gamma - 3\alpha > 2\delta - 3\beta$
3. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί, να αποδείξετε ότι:
 - i) $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma$
 - ii) $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\beta\delta^2 < \beta^2\gamma\delta$
4. Αν x, y, z πραγματικοί αριθμοί με $x < y < z$ να δείχτεί ότι : $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$.
5. Αν $\alpha < 2 < \beta$ να δείξετε ότι:
 - i. $(\alpha-2)(\beta-2)(\alpha-\beta) > 0$
 - ii. $\alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha$
6. Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι: $\alpha(\alpha-1) > -\beta$.
7. i) Αν α, β θετικοί και $\beta > 1 > \alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha - \beta < \alpha\beta - 1$.
 ii) Αν $\alpha^3 + 1 \leq \alpha^2 + \alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha \leq -1$.
8. Αν $x > 1$ να δείξετε ότι:
 - i. $x^2 > x$
 - ii. $x^3 + x > x^2 + 1$
9. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να δείχτεί ότι : $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 < 0$.
10. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να δείχτεί ότι : $\alpha < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \gamma$
11. Αν $3\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι : $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{4} < \frac{\beta}{3}$
12. Αν x, y θετικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} < 1$
13. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδείξετε ότι : $\alpha - \delta < \beta - \gamma$.
14. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ τότε να δείξετε ότι : $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) < 0$
15. Αν είναι $\alpha > \beta$ να αποδείξετε ότι: $5\beta - 6\alpha < 2\alpha - 3\beta$
16. Αν είναι $3\alpha - 2\beta < 5\beta - 4\alpha$ να αποδείξετε ότι: $\alpha < \beta$
17. Αν $x > 2$ τότε $x^3 > 2x^2 - x + 2$
18. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^2 > \beta^2$ να δείξετε ότι: $\alpha > \beta$
19. Αν $x > 4$, να δείχτεί ότι : $x^3 > 4x^2 - 3x + 12$.

20. Αν $x > 1$ να δείξετε ότι:

$$i) \frac{x}{x-1} > 1$$

$$ii) \frac{x+1}{1-x} < 1$$

$$iii) \frac{2}{x-1} > \frac{1}{x}$$

21. Αν $\alpha > \beta > 0$ να δείξετε ότι:

$$i. \frac{a+\beta}{\alpha} < \frac{\beta+2}{\beta}$$

$$ii. \frac{\alpha+2\beta}{1+2\beta} > \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

22. Αν είναι $-2 < x < 0$, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$i) (x-2)(1-x)$$

$$ii) (x+3)(x-2)$$

$$iii) x(x-1)(x+3)$$

$$iv) x^2(x-1)$$

23. Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}$

24. Να αποδείξετε ότι είναι μη αρνητική η παράσταση :

$$i) \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2$$

$$ii) \alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 - 2\beta + 2$$

$$iii) \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$iv) 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2$$

$$v) 2\alpha^2 - 6\alpha\beta + 5\beta^2$$

$$vi) \alpha^2 - 3\alpha + 3$$

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$i) (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$ii) (\alpha + 2\beta)^2 \geq 8\alpha\beta$$

$$iii) (\alpha + 5\beta)^2 \geq 2\alpha\beta$$

$$iv) 5\alpha^2 + 5\beta^2 \geq 8\alpha\beta$$

$$v) 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$vi) \alpha^4 - 2\alpha^2\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$vii) (\alpha + 3\beta)^2 \geq 2\beta(5\alpha + 2\beta)$$

$$viii) (\alpha - \beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

26. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \geq \alpha\beta$$

$$ii) 3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$$

$$iii) 2(\alpha^2 + \beta^2) - (\beta^2 - \alpha^2) \geq 2\beta(3\alpha - \beta)$$

27. Να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 6\beta \geq -13$

28. Να αποδείξετε ότι:

$$i. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$$

$$ii. 101 \cdot (x^2 + y^2) \geq (10x + y)^2$$

29. Να δείξετε ότι: $\frac{a^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2$

30. Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta}$

31. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει:

$$i) \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

$$ii) x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq 1$$

$$iii) \frac{x^2}{2} > x - 1$$

$$iv) \frac{(x^2 + 3)^2}{4} > x^2 + 2$$

32. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι :

i) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ ii) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) \geq 8\alpha\beta\gamma$

33. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι : $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$

34. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha - \beta + \gamma)$.

35. i) Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

ii) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 3$, να δείξετε ότι : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3$

iii) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να δείξετε ότι : $(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$

36. Να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$

37. Αν x, y, a θετικοί και $y < x$, να αποδείξετε ότι $\frac{x+a}{y+a} > \frac{y}{x}$

38. Αν α, β, γ θετικοί, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta > \alpha$

Σύνθετες αποδεικτικές ασκήσεις

39. Αν $\alpha + \beta = 1$ να δειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$

40. Αν $\alpha - \beta = 3$ να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{9}{2}$

41. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 2$ να δείξετε ότι:

i) $\beta < 2$ ii) $\alpha \cdot \beta \leq 1$ (πότε ισχύει το =)

iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2$

42. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $2\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 2\alpha + 2 > 0$, ii) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$

iii) $5\alpha^2 - 7\alpha\beta + 3\beta^2 + 1 > 0$, iv) $13\alpha^2 - 12\alpha + 13 > 0$

v) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \geq 1$, vi) $\frac{\alpha^2}{\alpha^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$

vii) $10\alpha^2 - 12\alpha\beta + 5\beta^2 - 2\alpha - 6\beta + 10 > 0$

43. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 + 1 \geq \alpha\beta + \beta + \alpha$

iv) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3$

44. Να αποδείξετε ότι:

- i) $\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \beta^4 \geq 0$ ii) αν $\alpha + \beta > 0$, τότε $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$
 iii) $(\alpha^3 + \beta^3)^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)^3$ iv) $\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta^4 \geq 0$
 v) αν $\alpha < \beta < \gamma$, τότε $\alpha\gamma + \beta^2 < \alpha\beta + \beta\gamma$

45. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, τότε:

- i) $(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta) \geq 4\alpha\beta\gamma\delta$ ii) $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \geq (\alpha\gamma + \beta\delta)^2$
 iii) $2(\alpha^7 + \beta^7) \geq (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^4 + \beta^4)$

46. Να δείξετε ότι:

- i) $x^2 - 4x + 5 > 0$ ii) $2\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0$
 iii) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$ iv) $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha + 1 \geq 0$

47. Να αποδείξετε ότι:

- i) αν $x, y > 0$, τότε $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ii) $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$
 iii) $x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x > 0$

48. Να αποδείξετε ότι για κάθε x πραγματικό είναι:

- i) $\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}$ ii) $-\frac{1}{6} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2}$

49. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} < \beta$

50. i) Να αποδείξετε ότι $3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \leq (\alpha + \beta + \gamma)^2 \leq 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$. Η

ανισότητα αυτή τότε ισχύει ως ισότητα ;

ii) Να αποδείξετε ότι $-1 < \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} < 1$

51. Να αποδείξετε ότι:

i) $(x + y)(x + 9y) > 16xy$ ii) $(x + y)(x + 16y) > 25xy$

iii) $(x + y)(x + 4y) > 7xy$.

Στην τελευταία ανισότητα τότε ισχύει το ίσον;

52. Αν οι α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο, να βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν ώστε να ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 > 3\alpha\beta\gamma$.

53. i) Αν $x + y > 1$ και $x > y$, να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 > x - y$.

ii) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι x, y ώστε να ισχύει $x^2 - y^2 < x - y$;

54. i) Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$.

ii) Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 > 3(\alpha - \beta)$.

55. i) Να τρέψετε σε γινόμενο καθεμία από τις παραστάσεις $x^2 + x - 2$ και $x^3 + x^2 + x - 3$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) αν $x > -2$, τότε $x^3 - 1 > 3(x - 1)$

β) $x^4 - 1 > 4(x - 1)$

56. Αν $\alpha > 2\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 - 3\beta^3 > 3\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2$.

57. Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{3}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}} < \gamma$

58. Αν α, β θετικοί ακέραιοι και ισχύει $\alpha + \beta < 6$ και $\alpha - \beta > 2$, να υπολογίσετε τους α, β

59. Αν ισχύουν οι ανισότητες $x - y < z + 2$ (1), $2y + 2z < x - 1$ (2), $4 - y < z + x$ (3) να υπολογίσετε τον x .

60. Αν $x \neq -1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x+1} = 1 - x + \frac{x^2}{x+1}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αν

$$x \geq \frac{1}{2}, \text{ τότε } 0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$$

61. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad 3(1 + \alpha^2 + \alpha^4) > (1 + \alpha + \alpha^2)^2 \quad \text{ii)} \quad \alpha^4 + \beta^4 + 18\alpha^2\beta^2 - 8\alpha^3\beta - 8\alpha\beta^3 > 0$$

$$\text{iii)} \quad 8\alpha\beta(1 - \alpha\beta) < (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2). \text{ Πότε ισχύει η ισότητα;}$$

62. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \text{αν } \alpha, \beta > 0, \text{ τότε } (a + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$$

$$\text{ii)} \quad \text{αν } \alpha, \beta > 0 \text{ και } \alpha \cdot \beta = 1, \text{ τότε } (1 + \alpha)(1 + \beta) \geq 4$$

$$\text{iii)} \quad \text{αν } \alpha, \beta > 0 \text{ και } \alpha + \beta = 1, \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 4$$

$$\text{iv)} \quad \text{αν } \alpha + \beta + \gamma = 0, \text{ τότε } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 0.$$

63. Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i)} \quad \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \quad \text{ii)} \quad x^2 + x + 1 \geq 0$$

64. Να δείξετε ότι: i) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii) $\beta^2 + 6\beta + 11 > 0$

65. Αν v φυσικός αριθμός να δειχθεί $\frac{v^2 + 2v + 3}{v^2 + 4} \leq 6$

66. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου, να αποδείξετε ότι :

$$i) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \quad ii) (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 < 4\beta^2\gamma^2$$

67. Αν $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί.

Σύγκριση αριθμών

68. Αν $x < -1$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις $A = x^3 + 1$ και $B = x^2 + x$.

69. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \kappa \alpha l \quad B = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

70. Αν είναι $\alpha > \beta$, να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) 2α , $\alpha+\beta$ ii) 3α , $2\alpha+\beta$
 iii) $\alpha+2$, $\beta+1$ iv) $2\alpha-5$, $2\beta-6$

71. Αν $0 < x < y$ να διατάξετε κατά σειρά μεγέθους τους αριθμούς: $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

72. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\alpha < \beta < -2$ να διατάξετε στη σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

- i) $\alpha, \beta, \alpha-1, \beta+2$
- ii) $\alpha^2, \beta^2, (\alpha-1)^2, (\beta+2)^2$

73. Αν $a > 0$ να διατάξετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{a+8}{a+3}, \frac{a+6}{a+7}, \frac{a+6}{a+5}.$$

74. Αν $\alpha < -2$ και $\beta > -1$

i. να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha\beta + 2$, $-\alpha - 2\beta$

ii. να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^3 > 3$

75. Αν είναι $\alpha > 2$, να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\alpha+2$, $2\alpha+1$ ii) $\alpha+3$, $2\alpha+3$ iii) $2\alpha-5$, $3\alpha-7$

76. Αν είναι $\alpha < \beta < 2$, να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) 2α , $\alpha+\beta$ ii) $\alpha+\beta$, 2β
iii) $3\alpha+\beta$, 4β iv) $\alpha-\beta$, $2-\alpha$

77. Αν $x > 0$ να συγκριθούν οι αριθμοί : $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x + \frac{1}{x}$

78. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $2 < x < y$. Να γράψετε σε μια σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $x^2, y^2, (y+1)^2, (x-1)^2$.

79. Αν $A = 2^{65}$ και $B = 5^{22} - 125^7$, να αποδειχθεί ότι $A > B$.

80. Αν $\alpha, \beta, \gamma < 0$, $x, y < 0$ και ισχύουν οι σχέσεις: $5\alpha = 7\beta = 3\gamma$, $3y = 5x$, να διατάξετε τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y$ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

81. Αν α, β, γ αρνητικοί αριθμοί και ισχύει: $5\alpha=6\beta=7\gamma$ να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους α, β, γ .

82. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου, να συγκρίνετε τις παραστάσεις :

i) γ^2 και $(\alpha + \beta)^2$ ii) β^2 και $(\alpha - \gamma)^2$ iii) α^2 και $(\beta - \gamma)^2$

Ηισότητα: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

83. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 5\beta^2 = 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

ii) $2\alpha^2 + 5\beta^2 = 5\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\beta = 0$

84. Να λυθεί η εξίσωση:

i) $(2x-4)^2 + (y+1)^2 = 0$

ii) $(x-y-2)^2 + (x+y+2)^2 = 0$

iii) $(2x-y)^2 + (y-2)^2 = 0$

iv) $(x^2-4)^2 + (x^2+2x)^2 = 0$

85. Να λυθεί η εξίσωση:

i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

ii) $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$

86. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $(2x-4)^2 + (x+1)^2 \neq 0$,

ii) $(x-2)^2 + (x-1)^2 > 0$

iii) $x^2 - 6x + 10 > 0$,

iv) $12x - 13x^2 - 13 < 0$

87. Να βρείτε για ποιες τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $(x-2)^2 + (y+1)^2 > 0$

ii) $(-x-1)^2 + (1-y)^2 \neq 0$

88. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $x^2 + y^2 - 2xy + x^2 \geq 0$

ii) $5x^2 + 5y^2 - 8xy \geq 0$

iii) $10x^2 - 16x + 8 \geq 0$

iv) $x^2 + y^2 + 1 + 2y - 2xy - 2x \geq 0$

89. Αν $2x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4x \leq 0$, να αποδείξετε ότι $x = y = 2$

90. Αν ισχύει η σχέση: $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ να υπολογίσετε τους x και y .

91. Αν $\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma(\alpha + 2\beta) + 5\gamma^2 \leq 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha = \frac{\beta}{2} = \gamma$

92. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

i) $x^2 + y^2 - 2(x-y) + 2 = 0$

ii) $x^2 + y^2 + 13 = 2(3y - 2x)$

iii) $x^2 + y^2 = 4(y-1)$

iv) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4(x+y+1)$.

93. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

i) $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$

ii) $2x^2 + 9y^2 = -9 - 6x(1 - y)$

iii) $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

94. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

i) $x^2 + y^2 + z^2 + 6 = 2(x - y + 2z)$

ii) $3x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2x(y - z + 2)$

95. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

i. $x^2 + y^2 - 10x + 4y \leq -29$

ii. $2x^2 + 1 + 2xy - 2x + y^2 \leq 0$

96. i) Να αποδείξετε ότι : $x^2 + y^2 + 5 \geq 2(x - 2y)$

ii) Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

97. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

i) $x^2 + y^2 + 20 \leq 4(2y - x)$

ii) $(x+1)^2 + y^2 \leq 4x - 3(2y+3)$

iii) $2x^2 + y^2 + 9 \leq 2x(3 - y)$

98. i) Αν ισχύει : $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2y(x + z)$, να αποδείξετε ότι $x = y = z$

ii) Αν ισχύει : $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$, να αποδείξετε ότι $x = y = z$

Μεταβατική Ιδιότητα

99. Αν $x > 1$ και $y > 3x$ να δείξετε ότι:

i. $y > 3$

ii. $xy + 3 > 3x + y$

iii. $x - \frac{1}{y} > \frac{2}{3}$

100. Αν $x > \frac{1}{2}$, $y > 2x$ και $z > 3y$ να δείξετε ότι: $z > 3$

Ελάχιστη και μέγιστη τιμή παραστάσεων

101. Αν ισχύει $x < y$ και $0 < z < \omega$, να δείξετε ότι: $x - \frac{1}{z} < y - \frac{1}{\omega}$

102. Αν ισχύει $0 < x < 1$ και $-2 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων $x+y$, $-y$, $2x+3y$, $x-y$, $\frac{y}{x}$

103. Αν ισχύει $\frac{3}{10} < A < \frac{2}{5}$ και $1 < B < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) $A \cdot B$ ii) $2-5A \cdot B$

104. Αν ισχύει $\frac{1}{6} < A < \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4} < B < \frac{1}{2}$ τότε: να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) $3A$ ii) $-2B$ iii) $3A-2B$

105. Αν ισχύει $\frac{1}{2} < a \leq 1$:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) a^2 ii) $\frac{1}{a}$

β) Να δείξετε ότι: $\frac{5}{4} < \frac{a^3+1}{a} < 3$

106. Αν ισχύει $1 \leq a < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) $\frac{a}{a+1}$ ii) $(a-1)^2-3$

107. Αν ισχύει $0 \leq x < 1$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) x^2 ii) $\frac{1}{x^2+1}$

108. Αν ισχύει $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$, $\frac{1}{4} < y < \frac{3}{2}$ και $1 < 2z < 5$, να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών παίρνει τιμές η παράσταση $A = -6x+8y-z$

109. Αν ισχύει $0 \leq x \leq 2$, να αποδείξετε ότι :

i) $0 \leq x^2 \leq 4$ ii) $2 \leq x^2+3x+2 \leq 12$ iii) $-4 \leq x^2-3x+2 \leq 6$

110. Αν ισχύει $-3 < \alpha < -2$ και $5 < \beta < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης :

i) $\alpha\beta$ ii) $\frac{\alpha}{\beta}$ iii) $\alpha^2 + \beta^2$

111. Αν ισχύει $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ και $-3 < \beta < \frac{5}{2}$ ($\beta \neq 0$), να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης:

i) $\alpha \cdot \beta$ ii) $\frac{\alpha}{5+\beta}$

112. Αν ισχύει $3 < x < 4$ και $A = 4 - x$

i) να δείξετε ότι: $0 < A < 1$

ii) να διατάξετε στη σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: A, A^2, A^3 .

113. Αν ισχύει $2 < x < 11$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση: $A = x + \frac{1}{x}$

114. Έστω η παράσταση: $A = 2 - \frac{\beta}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ και $0 < \beta \leq 1$. Να δείξετε ότι:

i) $0 < \frac{1}{1+\alpha} < 1$

ii) $0 < \frac{\beta}{1+\alpha} < 1$

iii) $1 < A < 2$

115. Αν ισχύει $1 < x < 2$ και $0 < y < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

i) $x + y$

ii) $x - y$

iii) $x^2 + y^2$

116. Αν ισχύει $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ και $-\frac{2}{3} < y < \frac{1}{6}$ να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

i) $A = 6x + 18y$

ii) $B = 12x - 6y - 3$

Διαστήματα

117. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών που ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $2 \leq x \leq 6$

ii) $1 < x \leq 5$

iii) $-4 \leq x < 3$

iv) $-8 < x < -2$

v) $x > 4$

vi) $x \leq -5$

vii) $x < 0$

viii) $x \geq -1$

118. Αν $x \in [1, 2]$ και $y \in [3, 4]$, να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί :

i) $\alpha = 2x + 3y$

ii) $\beta = 3x - 2y$

iii) $\gamma = -4x - y$

iv) $\delta = xy - 6$

119. Αν $x \in (2, 3)$ και $y \in (6, 8)$, να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί :

i) $\alpha = y - x$

ii) $\beta = 5x - 2y$

iii) $\gamma = x^2 - 3y$

iv) $\delta = \frac{y}{x} - 1$

120. Με βασικό σύνολο το $\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σύνολα $A = [2, +\infty)$ και $B = (-\infty, 6)$. Να βρείτε τα σύνολα:

i) $A \cup B$

ii) $A \cap B$

iii) A'

iv) B'

v) $A' \cap B'$

vi) $A \cup B'$

vii) $A - B$

viii) $B - A$

121. Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ σε καθεμία από τις περιπτώσεις ;

i) $A = [1, 4]$ $B = (3, 5)$

ii) $A = [2, 7]$ $B = [7, 10]$

iii) $A = [-1, 2]$ $B = (2, 3)$

iv) $A = [-3, 1]$ $B = (-1, 1)$

Συνδυαστικά θέματα

122. Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει : $(24+3x)^2 + (9y+18)^2 = 0$

i) Να βρείτε τους αριθμούς x και y

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{(x^{-2} y^{-13} \omega^{-2})^{-3} (y^2 \omega^{-3})^4 : x^{-1}}{(x^2 y^3 \omega^2)^3 (x^{-3} y^{-2} \omega^3)^{-4}}$, όπου $\omega \neq 0$.

123. i) Να αποδείξετε ότι : $a^2 + \beta^2 - 2a + 2\beta + 2 \geq 0$

ii) Αν οι αριθμοί $a, \beta \neq 0$ είναι ετερόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς : $\frac{2-a}{\beta}$ και

$$\frac{\beta+2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\beta}.$$

124. Για τους αριθμούς a και β ισχύει : $\alpha\beta+1 > \alpha+\beta > 2$

i) Να αποδείξετε ότι : $\alpha-1 > 0$ και $1-\beta < 0$

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}$

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x = \beta^3 - 1$ και $y = \beta^2 - \beta$.

125. α) Να αποδείξετε ότι : $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$

β) Αν ισχύει $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι :

i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 4$

ii) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

126. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

ii) αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \geq 8\alpha\beta\gamma$

iii) αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ τότε $\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \alpha\gamma(\alpha+\gamma) \geq 6\alpha\beta\gamma$

iv) αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ τότε $(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$

127. α) Να αποδειχθεί ότι : $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y , έχει περίμετρο 20m.

i) Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x

ii) Να εκφραστεί το εμβαδόν E του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α)

iii) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν E είναι μικρότερο ή ίσο των 25m^2 .

128. Δίνονται οι αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει : $4\kappa^2 + 9\lambda^2 + 5 = 12\lambda - 4\kappa$.

Θεωρούμε και τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες $P(A)$ και

$P(A \cup B)$ είναι διαφορετικές και ανήκουν στο σύνολο $\Sigma = \left\{ \kappa, \lambda, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A \cup B)$

- γ) Αν επιπλέον η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:
- i) να πραγματοποιηθεί το B,
 - ii) να πραγματοποιηθεί το B και όχι το A.

ΔΑΡΑΣ