

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

ii) $\sqrt{\alpha^2} = (\sqrt{\alpha})^2, \alpha \geq 0$

iii) Αν $\alpha\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

iv) Αν $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}$

v) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[3]{\alpha^4} = \alpha\sqrt[3]{\alpha}$

vi) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha}$

vii) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[6]{\alpha^2} = \sqrt[3]{\alpha}$

viii) Αν $\alpha \cdot \beta > 0$ τότε $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

i) Ο αντίστροφος του $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ είναι ο.....

ii) $|x-1| = \sqrt{x^2} \dots\dots\dots$

iii) $|x_1 - x_2| = \sqrt{x_1^2 + \dots\dots\dots}$

iv) Αν $x < 0$ τότε: $\sqrt{x^2} = \dots\dots\dots$

v) $\sqrt{(-3)^2} = \dots\dots\dots$

vi) Αν $x \geq 0$ τότε: $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

vii) Αν $x \geq 0$ τότε: $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

viii) Αν $a > 0$ και $a - 2\sqrt{a} + 1 = 0$ τότε $a = \dots\dots\dots$

ix) Η ισότητα $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ ισχύει όταν $\dots\dots\dots$

x) Η ισότητα $\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$ ισχύει όταν $\dots\dots\dots$

xi) Η ισότητα $\sqrt{(x-2)^2(x-1)} = (x-2)\sqrt{x-1}$ ισχύει όταν $\dots\dots\dots$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$

ii) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$

iii) Αν $x < 1$ τότε: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x-1$

iv) Για κάθε $x \geq 0$, $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

v) $\sqrt{x^4} = x^2$

vi) ο αντίστροφος του $1 - \sqrt{3}$ είναι ο $1 + \sqrt{3}$

vii) Αν x, y ετερόσημοι τότε: $\sqrt{x^2 y^2} = xy$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{9}$

ii) $\sqrt{25}$

iii) $\sqrt{64}$

iv) $\sqrt{81}$

v) $\sqrt[3]{8}$

vi) $\sqrt[3]{27}$

vii) $\sqrt[5]{1}$

viii) $\sqrt[6]{0}$

ix) $\sqrt[4]{10000}$

2. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{121}$

ii) $\sqrt{144}$

iii) $\sqrt{169}$

iv) $\sqrt{196}$

v) $\sqrt{225}$

vi) $\sqrt[3]{64}$

vii) $\sqrt[3]{125}$

viii) $\sqrt[4]{81}$

ix) $\sqrt[4]{256}$

3. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{17^2}$

ii) $\sqrt{39^2}$

iii) $\sqrt{(-23)^2}$

iv) $\sqrt{-16}$

4. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt[3]{7^3}$

ii) $\sqrt[4]{11^4}$

iii) $\sqrt[8]{(-3)^8}$

iv) $\sqrt[4]{-6^4}$

5. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{7^4}$

ii) $\sqrt{2^8}$

iii) $\sqrt{3^6}$

iv) $\sqrt[3]{5^6}$

v) $\sqrt[4]{6^8}$

vi) $\sqrt[5]{2^{15}}$

6. Να απλοποιήσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt[6]{2^9}$

ii) $\sqrt[6]{7^4}$

iii) $\sqrt[8]{3^{12}}$

iv) $\sqrt[12]{2^9}$

v) $\sqrt[10]{5^8}$

vi) $\sqrt[15]{3^{10}}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

ii) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

iii) $\sqrt{14,4} \cdot \sqrt{10}$

iv) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$

v) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

vi) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

vii) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{5}}$

viii) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{27}}$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3}$

ii) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3}$

iii) $\frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}}$

iv) $\frac{\sqrt[4]{11^5}}{\sqrt[4]{11}}$

v) $\sqrt[3]{5^7} \cdot \sqrt[3]{5^{-4}}$

vi) $\sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}}$

9. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\sqrt[11]{3^4} \cdot \sqrt[11]{3^5} \cdot \sqrt[11]{3^2}$

ii) $\sqrt[9]{2^3} \cdot \sqrt[9]{2^5} \cdot \sqrt[9]{2}$

iii) $\frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}}$

iv) $\frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$

v) $\frac{\sqrt[5]{7^{13}}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^8}}$

vi) $\frac{\sqrt[5]{6^9} \cdot \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^6} \cdot \sqrt[5]{6}}$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^{13}}$

ii) $\sqrt[4]{7^5} \cdot \sqrt[4]{7^3}$

iii) $\frac{\sqrt[3]{2^{16}}}{\sqrt[3]{2^4}}$

iv) $\sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^8}$

v) $\frac{\sqrt[5]{6^9} \cdot \sqrt[5]{6^7}}{\sqrt[5]{6^6}}$

vi) $\frac{\sqrt[3]{2^7} \cdot \sqrt[3]{2^{13}}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2}}$

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$

ii) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$

iii) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$

iv) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot 2^8}$

v) $\sqrt[4]{3^9 \cdot 2^{12}}$

vi) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot 2^{24} \cdot 5^6}$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $36^{\frac{1}{2}}$

ii) $27^{\frac{1}{3}}$

iii) $16^{\frac{1}{4}}$

iv) $8^{\frac{2}{3}}$

v) $9^{\frac{3}{2}}$

vi) $4^{\frac{5}{2}}$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $4^{\frac{5}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$

ii) $49^{\frac{1}{6}} \cdot 49^{\frac{1}{3}}$

iii) $\frac{27^{\frac{3}{4}}}{27^{\frac{1}{12}}}$

iv) $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{14}{15}}}{8^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{15}}}$

14. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $\left(8^{\frac{8}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$

ii) $\left(9^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(9^{\frac{3}{20}}\right)^{\frac{5}{3}}$

iii) $\frac{\left(4^{\frac{30}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{27}{8}}\right)^{\frac{7}{9}}}$

iv) $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(18^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{7}}$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $\sqrt[3]{4^{\frac{13}{4}}} \cdot \sqrt[4]{4^{\frac{17}{6}}}$

ii) $\left(\sqrt[4]{8^3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

16. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $\sqrt[3]{\sqrt{2^9}} \cdot \sqrt{2}$

ii) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^5}} \cdot \sqrt[12]{3^7}$

iii) $\frac{\sqrt[4]{\sqrt{6^{11}}}}{\sqrt[8]{6^3}}$

iv) $\sqrt[6]{5^{13}} \cdot \sqrt[4]{3^{5^{11}}}$

v) $\sqrt[3]{6^{7^{23}}} \cdot \sqrt[6]{7^{13}}$

vi) $\sqrt[6]{5^{13^9}} \cdot \sqrt[5]{4^{13^{14}}}$

17. α) Να αναλύσετε τους αριθμούς 1296 και 1728 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

β) Να υπολογίσετε τις ρίζες :

i) $\sqrt{1296}$

ii) $\sqrt[4]{1296}$

iii) $\sqrt[3]{1728}$

18. i) Να αναλύσετε τους αριθμούς 576 και 216 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt[3]{216}}$

19. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $x^2 - 3xy + y^2$, για $x = \sqrt{3} - 2$ και $y = \sqrt{3} + 2$

20. Αν $x = 1 - 2\sqrt{3}$ και $y = 1 + 2\sqrt{3}$ να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

i) $A = xy$

ii) $B = x^2 - xy + y^2$

21. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $A = \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$

ii) $B = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

iii) $\Gamma = \sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{180}$

iv) $\Delta = \sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2})$

v) $E = \frac{\sqrt{32} + \sqrt{50} + \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

22. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $A = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$

ii) $B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18}) \cdot \sqrt{8}$

iii) $\Gamma = (\sqrt{20} + \sqrt{45})(\sqrt{80} - \sqrt{5})$

iv) $\Delta = (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}) \cdot \sqrt[3]{4}$

23. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $A = \sqrt{8} - \sqrt{27} - \sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{200}$

ii) $B = \sqrt{20} - \sqrt{32} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{50}$

iii) $\Gamma = \sqrt{720}$

24. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{32} - \sqrt[6]{64} + 3\sqrt[10]{1024}$

ii) $B = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} - \sqrt[4]{\frac{81}{256}}$

25. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{81} + \sqrt[5]{32}$

ii) $B = \sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{64}$

26. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27}$

ii) $B = \sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54}$

iii) $\Gamma = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

27. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $A = \sqrt{5 + \sqrt{13} + \sqrt{9}}$

ii) $B = \sqrt[3]{2\sqrt{8}\sqrt{4}}$

iii) $\Gamma = \sqrt[3]{72 - 2\sqrt{11} + \sqrt{25}}$

iv) $\Delta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}}$

28. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) A = \sqrt[3]{25 + \sqrt{2 + \sqrt[3]{8}}}$$

$$ii) B = \sqrt{19 - \sqrt[3]{29 - \sqrt[4]{16}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt{4}}} + \sqrt[3]{27}$$

$$iv) \Delta = \sqrt{18\sqrt[4]{8\sqrt[3]{8}}}$$

29. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$$

$$ii) 2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{245} = 3\sqrt{5}$$

$$iii) 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50} = 10\sqrt{2}$$

$$iv) 3\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{18} = 7\sqrt{2}$$

30. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$ii) 2\sqrt[4]{243} - 3\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{1875} = 4\sqrt[4]{3}$$

31. Να βρείτε τα εξαγόμενα :

$$i) (3\sqrt{2} + 2\sqrt{12} - \sqrt{6})\sqrt{12}$$

$$ii) (\sqrt{5} + 1)^2 - (3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1) + (\sqrt{5} - 1)^2$$

32. Αν $A = \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{75}$ και $B = \sqrt{18} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + \sqrt{48}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$i) A \quad ii) B \quad iii) A \cdot B \quad iv) \frac{A}{B} \quad v) \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

33. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΕ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΕΣ

34. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{x-3} \quad ii) B = \sqrt{x+4} \quad iii) \Gamma = \sqrt[3]{3x+18} \quad iv) \Delta = \sqrt[4]{10-2x}$$

35. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt{x-1} \quad ii) B = \frac{x+1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$iii) \Gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad iv) \Delta = \sqrt{|x|-x}$$

36. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt{x-3} \quad ii) B = \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{4-x^2} \quad iv) \Delta = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

37. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{x^2(4-x)} \quad ii) B = \sqrt{4-|x-3|} \quad iii) \Gamma = \sqrt[5]{1-|x|} + \sqrt[3]{|x|-3}$$

38. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

i) $A = \frac{1}{\sqrt{x-6}}$

ii) $B = \frac{x-3}{\sqrt[3]{x+2}}$

iii) $\Gamma = \frac{2x-8}{\sqrt[5]{15-3x}}$

iv) $\sqrt[4]{7-(2x-1)}$

39. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

i) $A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$

ii) $B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[5]{x-5}$

iii) $\Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}}$

iv) $\Delta = \sqrt{12-4x} + \frac{1}{\sqrt[4]{2x+14}}$

40. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

i) $A = \sqrt{x^2+4x+4}$

ii) $B = \sqrt{-x^2+6x-9}$

iii) $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

iv) $\Delta = \frac{x-3}{\sqrt{-x^2+8x-16}}$

41. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουν νόημα οι παραστάσεις :

i) $A = \sqrt{3x-6} + \frac{1}{x-5}$

ii) $B = \frac{1-x}{\sqrt{9-3x}} + \frac{x}{x+2}$

ΡΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ

42. i) Να δείξετε ότι $\sqrt[\nu]{a^\mu} \cdot \sqrt[\nu]{a^{\nu-\mu}} = a$, $a \geq 0$

ii) Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

43. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

i) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

ii) $\frac{1}{\sqrt{4x^2+1-2x+1}}$ (x:ρητός)

iii) $\frac{1+3\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}$

iv) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

44. Να μετατρέψετε την παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή: $\frac{1}{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

45. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{3}{\sqrt{8}}$

ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

iii) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

iv) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

46. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ii) $\frac{7}{2-3\sqrt{2}}$

47. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ iv) $\frac{4}{\sqrt[4]{4}}$ v) $\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}$
 vi) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ vii) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ viii) $\frac{a-2\beta}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{2\beta}}$ ix) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
 x) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ xi) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ xii) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}+1}$

48. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ii) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ iii) $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$
 iv) $\frac{11}{5-\sqrt{3}}$ v) $\frac{1}{3\sqrt{2}+2}$ vi) $\frac{6}{4\sqrt{3}+2}$

49. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{10}{\sqrt{5}-1}$ iii) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$
 iv) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ v) $\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ vi) $\frac{6}{\sqrt{10}+2}$

50. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ iii) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ v) $\frac{6}{\sqrt[3]{3^2}}$
 vi) $\frac{12}{\sqrt[8]{9^5}}$ vii) $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ viii) $\frac{5}{2\sqrt[3]{5}}$ ix) $\frac{6}{5\sqrt[7]{3^5}}$

51. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$ ii) $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}}$ iii) $\frac{4}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ iv) $\frac{2}{\sqrt[3]{3} \cdot (3-\sqrt{5})}$
 v) $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{6})}$ vi) $\frac{6}{\sqrt[7]{3^4} \cdot (\sqrt{5}-1)}$

52. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ ii) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt[4]{6}+\sqrt{2}}$ iv) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{7}}$

53. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}}$ iii) $\frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$ iv) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$

54. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ii) $\frac{1}{4-\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

55. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$

ii) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$

iii) $\frac{1}{3 - \sqrt{5} - \sqrt{2}}$

iv) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6}}$

56. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt[4]{3^3 \sqrt{3}}$.

i) Να γράψετε την παράσταση A με τη βοήθεια μίας μόνο ρίζας

ii) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

57. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} + \frac{17}{3\sqrt{2} + 1}$

ii) $\frac{1}{(3 - \sqrt{2})^2} - \frac{1}{(3 + \sqrt{2})^2}$

58. Ν' αποδειχτεί ότι :

i) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} = \frac{9}{2}$

ii) $\frac{1}{(3 - \sqrt{7})^2} - \frac{1}{(3 + \sqrt{7})^2} = 3\sqrt{7}$

59. Να βρείτε τους αντιστρόφους των παρακάτω αριθμών και να τους μετατρέψετε σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

i) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

ii) $4 - \sqrt{6}$

iii) $\sqrt{7} + 3$

iv) $2\sqrt{3} - 1$

v) $3\sqrt{2} - 4$

vi) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$

60. Αν ο x είναι ρητός να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

i) $A = \frac{x^2 - 9x}{\sqrt{x} - 3}$

ii) $B = \frac{3x - 3}{\sqrt{x} - 3 - 2}$

iii) $\Gamma = \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

iv) $\Delta = \frac{x}{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{3 - 2x}}$

v) $E = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$

vi) $Z = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

61. Αν ο x είναι ρητός να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

ii) $A = \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$

ii) $B = \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}}$

iii) $\Gamma = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

iv) $\Delta = \frac{1}{\sqrt{x-1} - x + 2}$

v) $E = \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x-1} + 2}$

vi) $Z = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$ii) B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$iii) \Gamma = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

$$iv) \Delta = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}.$$

63. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{2\sqrt{5}-4}$$

$$ii) B = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$$

$$iii) \Gamma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \sqrt{15}$$

$$iv) \Delta = \frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{\sqrt[3]{8}}.$$

64. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{15}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{(\sqrt{10}+1)^2 - \sqrt{160}} \cdot (\sqrt{10}+1)$$

$$iv) \Delta = \sqrt[3]{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} \cdot \sqrt[3]{3}$$

65. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt{2^3}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} \cdot \sqrt[12]{7^7}$$

$$iv) \Delta = \frac{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}}.$$

66. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[6]{18^3}$$

$$ii) B = \sqrt[4]{(\sqrt{5}-3)^4} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{5}+3)^6}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[4]{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{5}+1)^3}$$

$$iv) \Delta = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^4} + \sqrt[3]{(1+\sqrt{12})^6}$$

67. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt{8^9 + 4^{12}}$$

$$ii) B = \sqrt{16^5 - 2^{19} + 4^8}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[3]{3^{11} - 27^3}$$

$$iv) \Delta = \sqrt{\frac{2^{43} + 4^{21} + 8^{13}}{4^{19} + 2^{35}}}$$

68. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = (\sqrt{2}-1)^2 (2\sqrt{2}+3)$$

$$ii) B = [(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}](\sqrt{5}+1)$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{15}-1)^2} + \sqrt[4]{81}$$

$$iv) \Delta = (\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$$

69. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$ii) B = \sqrt{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{50}-\sqrt{32})} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[3]{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 (7-2\sqrt{10})}$$

$$iv) \Delta = \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}-3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}$$

70. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$i) A = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}$$

$$ii) B = (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$$

$$\text{iii)} \Gamma = (\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{15} \quad \text{iv)} \Delta = \sqrt[3]{[(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 - 14]} : \sqrt{3}$$

71. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i)} A = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50}}{\sqrt{72} - \sqrt{8}}$$

$$\text{ii)} B = \sqrt{(\sqrt{12} + \sqrt{48}) \cdot (\sqrt{75} - \sqrt{27})}$$

72. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\sqrt{7} - 3)^2$

ii) Να βρείτε τη ρίζα $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$

73. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i. } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\text{ii. } \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$\text{iii. } \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$\text{iv. } \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

74. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\sqrt{5} - 3)^2$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = (\sqrt{5} + 3)\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

75. i) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3} + 2)^2$ και $(\sqrt{3} - 2)^2$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) \cdot \sqrt{3}$

76. i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $(1 + 2\sqrt{5})^2$ και $(1 - 2\sqrt{5})^2$

ii) Απλοποιήστε την παράσταση: $\sqrt{21 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{21 - 4\sqrt{5}}$

77. i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $(1 - 3\sqrt{2})^2$ και $(1 + 3\sqrt{2})^2$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$

78. Να δείξετε ότι ο αριθμός $7 - 5\sqrt{2}$ είναι η κυβική ρίζα του $1 - \sqrt{2}$.

79. i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $(\sqrt{2} - 1)^3$ και $(1 + \sqrt{2})^3$

ii) Απλοποιήστε την παράσταση: $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$

80. i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $(2 + \sqrt{3})^3$ και $(2 - \sqrt{3})^3$

ii) Απλοποιήστε την παράσταση: $A = (\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}})\sqrt{27}$

81. i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $(2 + \sqrt{2})^3$ και $(2 - \sqrt{2})^3$

ii) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$

82. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \sqrt[3]{25\sqrt{3} - \sqrt{2}}\sqrt[3]{3 + \sqrt{2}}$

83. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

84. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt{13}\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{5+2\sqrt{3}}$$

$$ii) B = (1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})$$

85. Να δείξετε ότι:

$$i) \sqrt{8}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+2) = 4$$

$$ii) (3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}) - \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 0$$

86. Να δείξετε ότι:

$$i) \frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10$$

$$ii) \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = 14$$

87. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$i) \frac{1}{3-\sqrt{2}} - \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

$$ii) (1-\sqrt{2})^{-2} - (1+\sqrt{2})^{-2}$$

$$iii) (\sqrt{2}+1)^{-3} - (\sqrt{2}-1)^{-3}$$

$$88. \text{Να εκτελέσετε τις πράξεις: } \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}+1} - \frac{17}{1+3\sqrt{2}}$$

$$89. \text{Να απλοποιηθεί η παράσταση } A = (2-\sqrt{3})^3 - (2+\sqrt{3})^3$$

$$90. \text{Να δείξετε ότι: } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

91. Αν x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$i) \sqrt[4]{x^6} \quad ii) \sqrt[6]{x^{18}} \quad iii) \sqrt[3]{x^6} \quad iv) \frac{\sqrt{x^2}}{x}, x \neq 0.$$

92. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις ρίζες:

$$i) \sqrt{\alpha^4 \beta^6} \quad ii) \sqrt{\alpha^8 \beta^2} \quad iii) \sqrt[3]{\alpha^6 \beta^9} \quad iv) \sqrt[4]{\alpha^{12} \beta^8} \quad v) \sqrt[6]{\alpha^{12} \beta^6} \quad vi) \sqrt[3]{\alpha^{15} \beta^{21}}.$$

93. Αν ισχύει $x < 0 < y$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \quad ii) B = \sqrt{16y^2} - \sqrt{25x^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt{36x^2 y^2}$$

$$iv) \Delta = \sqrt{9x^6 y^6} \quad v) E = \sqrt[3]{8x^6 y^6} \quad vi) Z = \sqrt[4]{x^4 y^{12}}$$

94. Αν $\alpha, \beta > 0$, να απλοποιήσετε τις ρίζες:

$$i) \sqrt{25\alpha^6} \quad ii) \sqrt[3]{\frac{8\alpha^6}{27\beta^{12}}} \quad iii) \sqrt[3]{27\alpha^3 \beta^9} \quad iv) \sqrt[4]{16\alpha^8 \beta^{-20}} \quad v) \sqrt[3]{\frac{27}{\alpha^{15} \beta^{18}}} \quad vi) \sqrt[6]{64\alpha^{24} \beta^{-30}}.$$

95. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt{\alpha^3 \beta} \cdot \sqrt{\alpha \beta^5} \quad ii) B = \sqrt[3]{\alpha^5 \beta^4} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4 \beta^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt[6]{64\alpha^7 \beta^{11}} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5 \beta^7}$$

$$iv) \Delta = \frac{\sqrt[4]{\alpha^{15} \cdot \beta^9}}{\sqrt[4]{\alpha^3 \cdot \beta}} \quad v) E = \sqrt[3]{\frac{\alpha^8}{\beta^5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\beta^{14}}{\alpha^2}} \quad vi) Z = \frac{\sqrt[5]{\alpha^4 \beta^{20}} \cdot \sqrt[5]{\alpha^{12} \beta^9}}{\sqrt[5]{\alpha \beta}}.$$

96. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt[4]{3\sqrt{\alpha^6}} \quad ii) B = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^9 \beta^6}} \quad iii) \Gamma = \sqrt{3\sqrt{\alpha^5}} \cdot \sqrt[6]{\alpha}$$

iv) $\Delta = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^7}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{\alpha^5}}$

v) $E = \sqrt[10]{\alpha^3 \beta^9} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{\alpha^7} \beta^{11}}$

vi) $Z = \sqrt[6]{\sqrt[3]{\alpha^8 \beta^4}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{\alpha \beta^5}}$

97. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί να γράψετε χωρίς το σύμβολο της ρίζας τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt{\alpha^2} \sqrt[4]{\alpha^4}$

ii) $B = \sqrt{\alpha^4 \beta^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha^8 \beta^4}$

98. Να γράψετε ως μία ρίζα τις παραστάσεις :

i) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$

ii) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$

iii) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$

iv) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[9]{a}$

v) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{a}}$

vi) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{a}}$

99. Να βρεθούν τα εξαγόμενα :

i) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$

ii) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7^5} \cdot \sqrt{7}$

iii) $\sqrt[9]{11} \cdot \sqrt[2]{11^3} \cdot \sqrt[3]{11^4}$

100. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας.

i) $\sqrt[4]{5}$

ii) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$

iii) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$

iv) $\sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^2}}$

101. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας

i) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

ii) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

iii) $\sqrt{3\sqrt{2}}$

102. Ν'απλοποιηθούν οι ρίζες:

i) $\sqrt{\alpha \sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha}}$

ii) $\sqrt{x \sqrt{x} \sqrt[3]{x}}$

iii) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^5} y \sqrt[3]{z}}$

103. i) Αν $x > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \sqrt{25x^2} - \sqrt{4x^2} - x$

ii) Αν $y < 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $B = \sqrt{36x^2} - \sqrt{9y^2} + 2y$.

104. Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{25x^2} - \sqrt{9x^2}$

ii) $B = \sqrt{16x^2} + \sqrt{4x^2} - 3x$

105. i) Αν ισχύει $0 < x < 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

ii) Αν ισχύει $2 < y < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $B = \sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9}$

106. Αν ισχύει $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

107. Αν ισχύει $\alpha < \beta < 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}}{\alpha - \beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2}}{\beta}$.

108. Αν $x \in (-2, 1)$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$.

109. Αν ισχύει $\alpha < 0 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt[4]{a^4} + \sqrt{\beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$

ii) $B = \sqrt{a^4 \beta^2 - 2\alpha^3 \beta^3 + \alpha^2 \beta^4}$

110. Αν ισχύει $|x| \leq 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

111. Δίνεται η παράσταση : $A = (\sqrt{x+4} - \sqrt{2-x}) \cdot (\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x})$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

112. Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{x^2} + 2x \quad ii) B = x - \sqrt{4x^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt{x^2 y^4} + 2xy^2 \quad iv) \Delta = \sqrt{4x^4 y^2} - 5x^2 y + \sqrt{9x^4 y^2}$$

113. Αν $x \geq 0$ και y πραγματικός αριθμός, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) A = \sqrt{xy^2} + 2y\sqrt{x} \quad ii) B = \sqrt{16xy^2} - \sqrt{25xy^2} + 2y\sqrt{x}$$

114. Αν $x, y \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) A = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{xy} - 1)^2 \quad ii) B = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{4y^2}$$

$$iii) \Gamma = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})$$

115. Αν $\alpha, \beta > 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta}} \right) \cdot (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) \quad ii) B = \frac{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 - (\sqrt{\alpha\beta} + 1)^2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

116. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$i) A = \left(\frac{\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - \sqrt{\alpha\beta} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} \right)^2 \quad ii) B = \frac{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 - (\sqrt{\alpha\beta} + 1)^2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

117. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι :

$$i) (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = 2\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta} \cdot (\alpha + \beta) \quad ii) (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$iii) (\sqrt{\alpha\beta} - 1)^2 + (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + 1)(\beta + 1)$$

$$iv) (2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 - 3(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \cdot (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = (\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\beta})^2$$

118. Αν $x^2 + y^2 = 1$, να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\frac{x^4 + 4y^2}{9}} + \sqrt{\frac{y^4 + 4x^2}{9}} = 1$.

119. Αν ισχύει $\alpha \geq \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3}}{2}} = \sqrt{\alpha + \sqrt{3}}$.

120. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β , ισχύει $\alpha - \beta = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \sqrt{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{\alpha}}$$

121. Αν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega > 0$ και ισχύει : $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{\gamma \omega} = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)(x + y + \omega)}$$

122. Αν ισχύει $0 < x < a$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{\frac{a+x}{\alpha-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{\alpha+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{\alpha-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{\alpha+x}}} = \frac{x}{a}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

123. Αν $a, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι :

i) $\sqrt{\alpha+16} \leq \sqrt{\alpha} + 4$

ii) $\sqrt{4\alpha+9\beta} \leq 2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\beta}$

iii) $\sqrt{(a+2)(\beta+3)} \geq \sqrt{3\alpha} + \sqrt{2\beta}$

124. Αν $a, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι :

i) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \geq 4\sqrt{\alpha\beta}$

ii) $\frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta$

iii) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \cdot (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$

iv) $\sqrt{\frac{a+4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}$.

125. Αν α, β θετικοί αριθμοί , να αποδείξετε ότι : $\frac{8\alpha\beta}{\alpha+2\beta} \leq \sqrt{8\alpha\beta} \leq \alpha + 2\beta$.

126. Αν $x, y > 0$, να αποδείξετε ότι :

i) $\frac{2\sqrt{x} \cdot (5\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}$

ii) $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

127. Αν $a > 0, \beta > 0$ να δείχτεί ότι:

i) $\alpha + 9\beta \geq 6\sqrt{\alpha\beta}$

ii) $\frac{a+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$.

128. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

i) $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

ii) $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

129. Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι:

i) $\frac{a+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \geq 2$

ii) $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$

130. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a ισχύει : $\frac{\alpha^2 + 4}{\sqrt{\alpha^2 + 3}} > 2$

131. Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι:

i) $\sqrt{a+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

ii) $a + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

132. Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι:

i) $\alpha + 1 \geq 2\sqrt{\alpha}$

ii) $(\alpha + 1)(\beta + 1) \geq \sqrt{16\alpha\beta}$.

133. Να δείξετε ότι

i) $\frac{\alpha + 4}{2} \geq 2\sqrt{\alpha}$, $\alpha, \beta \geq 0$

ii) $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$, $x \geq 0$

iii) $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \geq 8\sqrt{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

iv) $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$

134. Αν $(\alpha - 1)^2 + |2\alpha - \beta| + \sqrt{a - \beta + \gamma} = 0$, Να βρείτε τους α, β, γ .ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

135. Να συγκριθούν οι αριθμοί :

i) 2 και $\sqrt{3}$

ii) 3 και $\sqrt{10}$

iii) $2\sqrt{3}$ και $\sqrt{13}$

iv) $3\sqrt{2}$ και $\sqrt{17}$

136. Να συγκριθούν οι αριθμοί : $3 + \sqrt{2}$ και $2 + \sqrt{7}$

137. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

i) $1 - \sqrt{2}$ και $\sqrt{5} - 2$

ii) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

138. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $2\sqrt{2}$ και 3

ii) 6 και $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$

iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv) $\sqrt{2} - 1$ και $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

139. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $\sqrt{2} + 1$ και $\sqrt{3}$

ii) $\sqrt{2} - 2$ και $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

iii) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$

iv) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{10}$

v) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ και $2\sqrt{2}$

vi) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ και $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$

140. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$

ii) $\sqrt{5} + 1 > \sqrt{3} + \sqrt{2}$

iii) $\sqrt{4 + 3\sqrt{10}} > \sqrt{5} + \sqrt{2}$

141. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{2}$

ii) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

iii) $\sqrt[4]{10} > \sqrt{3}$

iv) $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$

142. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$

ii) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

143. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } 3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6} \quad \text{ii) } \sqrt{7+2\sqrt{5}} > 1 + \sqrt{5} \quad \text{iii) } \sqrt{3+2\sqrt{3}} < 1 + \sqrt{3} \quad \text{iv) } \sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$$

144. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } \sqrt{5} + \sqrt{2} < \sqrt{10} + 1 & \text{ii) } \sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{7} & \text{iii) } \sqrt{12} - \sqrt{2} > \sqrt{6} - 2 \\ \text{iv) } \sqrt{10} + \sqrt{7} < 3 + 2\sqrt{2} & \text{v) } \sqrt{8+2\sqrt{6}} > \sqrt{2} + \sqrt{3} & \text{vi) } \sqrt{3} - 1 < \sqrt[3]{11-6\sqrt{3}} \end{array}$$

145. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } 1 + \sqrt{3} > \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} & \text{ii) } \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{15} \geq 4 \\ \text{iii) } 6 > \frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{5} & \text{iv) } \sqrt[4]{9 - \sqrt{15}} > \sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}} \end{array}$$

146. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{ii) } \sqrt[3]{26 + 5\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1 \\ \text{iii) } \sqrt{6 + \sqrt{35}} - \sqrt{6 - \sqrt{35}} = \sqrt{10} & \text{iv) } \sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{14} \end{array}$$

ΡΙΖΑ ΩΣ ΥΠΟΡΡΙΖΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ

147. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$\begin{array}{lll} \text{i) } A = \sqrt{3\sqrt{3}} & \text{ii) } B = \sqrt{2\sqrt[3]{2}} & \text{iii) } \Gamma = \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} \\ \text{iv) } \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}} & \text{v) } E = \sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^{13}}} & \text{vi) } Z = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}} \end{array}$$

148. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$\begin{array}{lll} \text{i) } A = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^3}} & \text{ii) } B = \sqrt[4]{\alpha^3\sqrt{\alpha^5}} & \text{iii) } \Gamma = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[4]{\alpha^7}} \\ \text{iv) } \Delta = \sqrt[4]{\alpha^3\sqrt{\alpha^5}\sqrt{\alpha}} & \text{v) } E = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^6}\sqrt{\alpha^3}} & \text{vi) } Z = \sqrt[5]{\sqrt[6]{\alpha^4} \cdot \sqrt[3]{\alpha^8}} \end{array}$$

149. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$\begin{array}{lll} \text{i) } A = \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}} & \text{ii) } B = \sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt[5]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^3}} & \text{iii) } \Gamma = \sqrt[7]{\alpha^4 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha^7}} \\ \text{iv) } \Delta = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha}} & & \end{array}$$

150. Αν $x > 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$\begin{array}{lll} \text{i) } A = \sqrt{\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}} & \text{ii) } B = \sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}} & \text{iii) } \Gamma = \sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}\sqrt{\frac{1}{x}}} \\ \text{iv) } \Delta = \sqrt[4]{\frac{1}{x}\sqrt{x^2\sqrt[3]{x^2}}} & \text{v) } E = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}\sqrt{x^9}} & \text{vi) } Z = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\sqrt{x^4}\sqrt{\frac{1}{x}}} \end{array}$$

151. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$i) A = \sqrt{\alpha \beta^3 \sqrt{\alpha \beta}}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{\alpha^3 \sqrt{\beta^3}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[3]{\alpha^2 \sqrt{\beta^3 \sqrt{\alpha^7 \beta^3}}}$$

$$iv) \Delta = \sqrt[4]{\alpha^2 \beta^3 \sqrt{\alpha^2 \beta^5}}$$

$$v) E = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha \beta^4} \sqrt[5]{\alpha^7}}$$

$$vi) Z = \sqrt{\alpha^3 \sqrt[4]{\beta^2 \sqrt[3]{\beta^2 \alpha^4}}}$$

152. Αν $\alpha, \beta > 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$i) A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta} \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^3} \sqrt[3]{\frac{\beta^3}{\alpha^4}}}$$

$$iv) \Delta = \sqrt[3]{\alpha^4 \beta^5 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$v) E = \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2 \beta} \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

$$vi) Z = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha^6 \beta^5}}}$$

153. Αν $\alpha, \beta > 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$i) A = \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^3 \sqrt{\alpha^5 \beta^6}}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{\alpha^3 \beta^3 \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^3 \sqrt[3]{\alpha \beta^4}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha^2} \sqrt[4]{\frac{\beta^3 \alpha^3}{\alpha^3}}}}$$

$$iv) \Delta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta} \sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}}}$$

$$v) E = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta} \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} \cdot \sqrt[8]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

$$vi) Z = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha^6 \beta^5}}}$$

154. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας :

$$i) A = \sqrt{\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[24]{\alpha}}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{\alpha^3 \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[12]{\alpha}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt[3]{\alpha^4 \sqrt[4]{\alpha^2}} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3}}$$

$$iv) \Delta = \sqrt[4]{\alpha^3 \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt[8]{\alpha^3}}$$

155. Αν $\alpha, \beta > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{\sqrt[3]{\alpha \sqrt{\alpha}} + \sqrt[3]{\beta \sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

156. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{28+20\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$ και $\beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \sqrt{\alpha \beta^{-1} \sqrt{\alpha^{-1} \beta^2 \sqrt{\alpha^{-2}}}}$.

157. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2} \sqrt[2]{2^7}} \sqrt[8]{8}$ και $\beta = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{2\sqrt{2}+3}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Αν $x = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}}$, $y = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$ και $\omega = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}}$, να υπολογίσετε το γινόμενο $x \cdot y \cdot \omega$.

158. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt[5]{3^4 \sqrt[3]{3} \sqrt{3}} \cdot \sqrt[10]{3}$ και $\beta = \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^4}}{\sqrt{5}}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές:

i) $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$

ii) $B = \frac{10}{\sqrt[4]{\beta} \cdot \sqrt[3]{\alpha}}$

159. i. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} = \sqrt{v+1} - \sqrt{v}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

160. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$ και $\beta = \left(\sqrt[3]{2\sqrt{3}\sqrt{2}} : \sqrt[5]{3\sqrt{2\sqrt{3}}} \right) \cdot \sqrt[20]{4} \cdot \sqrt[15]{9}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sqrt[6]{\alpha} \cdot \beta^2$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\beta x = \alpha$ και να γράψετε τη λύση της σαν κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

161. Έστω η παράσταση $A = \sqrt{a+1} - 1$ με $8 \leq a \leq 15$.

i) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση A .

ii) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης A και τις τιμές του a που τις παρουσιάζει.

162. Έστω η παράσταση $A = \sqrt{a-2}$ και $6 \leq a \leq 11$.

i) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση A .

ii) Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης A και τις τιμές του a που τις παρουσιάζει.

163. Δίνεται ο αριθμός $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$

i) Να αποδείξετε ότι $x < 0$

ii) Να βρείτε τον αριθμό x^2

iii) Να βρείτε τον αριθμό x

164. Έστω $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

i) Να δείξετε ότι: $\alpha > 0$

ii) Να βρείτε το α^2

iii) Να βρείτε τον αριθμό α

165. Έστω $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

i) Να δείξετε ότι: $x < 0$

ii) Να δείξετε ότι: $x^2 = 4$

iii) Να βρείτε τον x .

166. Έστω $\alpha = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{12}$

i) Να βρείτε τον αριθμό α

ii) Να βρείτε τον αριθμό $\beta = \sqrt{8}\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha}}$

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = (\sqrt{6 + \beta\sqrt{\alpha}} - 3)(1 + \sqrt{2})$

167. i) Να λύσετε τις εξισώσεις : $\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{27}$ και $\frac{y}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

ii) Για τις τιμές των x, y που βρήκατε στο ερώτημα(i), να αποδείξετε ότι οι αριθμοί :

$$\alpha = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{xy^3} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2y} \quad \text{είναι αντίστροφοι}$$

168. Αν οι αριθμοί $\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ και $\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.

169. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν :

- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$
- Οι πιθανότητες $P(B), P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο : $X = \left\{ \kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$, όπου

$$\kappa = \frac{3^{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{3}}}{\sqrt[5]{2^8} \cdot \sqrt[5]{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[5]{3+\sqrt{5}}}$$

α) Να βρείτε το κ

β) Να βρείτε τα $P(B), P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

γ) Να βρείτε τις πιθανότητες:

i) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A

ii) να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A