

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

1. Δίνεται το τριώνυμο : $-x^2 + 3x - 2$.Να βρείτε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου για :

i) $x = \frac{2011}{2010}$

ii) $x = -123$

iii) $x = \frac{123}{124} + \frac{124}{123}$

2. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

i) $f(x) = 5x^2 - 3x - 2$

ii) $g(x) = -x^2 + x + 2$

iii) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

3. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

i) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

ii) $g(x) = 2x^2 + 5x + 6$

iii) $h(x) = -x^2 + 4x - 4$

4. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

i) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

ii) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

iii) $h(x) = x^2 + x + 2$

iii) $k(x) = -2x^2 + x - 1$

iv) $l(x) = 2x^2 + 3$

vi) $n(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 9x + 14 > 0$

ii) $2x^2 + x + 9 > 0$

iii) $x^2 - 1 < 0$

iv) $3x^2 + x + 2 > 0$

v) $x^2 - x + 3 \leq 0$

vi) $4 - x^2 \geq 0$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 + 2x - 3 > 0$

ii) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

iii) $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$

iv) $-x^2 + 4x + 12 > 0$

v) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

vi) $-3x^2 + 4x + 4 \geq 0$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

ii) $-x^2 + 6x - 9 < 0$

iii) $2x^2 - 4x + 2 < 0$

iv) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

v) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

vi) $4x^2 - 12x + 9 > 0$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - x + 2 > 0$

ii) $2x^2 - 5x + 4 < 0$

iii) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$

iv) $-3x^2 + 3x - 1 \leq 0$

v) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$

vi) $3x^2 - 6x + 3 < 0$

9. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 5x < 0$

ii) $x^2 + 3x \geq 0$

iii) $-x^2 + 4x \leq 0$

iv) $-x^2 + 6x \geq 0$

v) $2x^2 - 5x \geq 0$

vi) $-3x^2 + 4x > 0$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 9 \leq 0$

ii) $x^2 - 16 > 0$

iii) $x^2 < 25$

iv) $\frac{x^2}{2} \geq 18$

v) $4x^2 - 25 > 0$

vi) $-9x^2 + 16 \geq 0$

11. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 < 1$

ii) $4x^2 > 9$

iii) $x^2 < 3$

iv) $1 - 2x^2 < 0$

v) $16x^2 > 9$

vi) $-25x^2 + 64 > 0$

12. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $5x^2 > x + 4$

ii) $x(1 - 2x) \geq -1$

iii) $(x - 1)^2 > x - 4$

iv) $x^2 < 3x$

v) $\frac{3x}{2} < x^2$

vi) $x - 1 < \frac{5x^2 - 2}{2}$

13. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 \leq 3x$

ii) $x^2 > -7x$

iii) $-2x^2 \leq 4x$

iv) $-x > \frac{x^2}{4}$

v) $\frac{-x}{6} \geq -x^2$

vi) $x \leq -x^2$

14. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $(3x - 2)^2 > 9$

ii) $(5x - 3)^2 < 1$

iii) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

iv) $4x^2 > 4x - 1$

v) $9x^2 \leq 6x - 1$

vi) $x^2 < 2x - 1$

15. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $3x^2 > 2x - 1$

ii) $3x - 1 < 5x^2$

16. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $(x + 3)^2 > 4(2x + 3)$

ii) $4(x - 5) - (x - 4)(x + 4) \geq 0$

iii) $2x(x - 2) - (x - 1)^2 < -4$

iv) $2(x - 3)(x + 3) - (x - 1)^2 \leq -11$

v) $(x + 1)^2 \geq \frac{5 - x}{2}$

vi) $x^2 + 1 - \frac{(x + 2)^2}{5} > 0$

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$

ii) $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

iii) $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$

iv) $-2x^2 - 2x + 12 < 0$ και $-3x + 12 \geq 0$

v) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ και $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$

vi) $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

i) $1 - 2x < 0$ και $x^2 \leq 11x - 10$

ii) $2x^2 < 1$ και $x(1 - 2x) \leq -1$

iii) $x^2 < 16$ και $x^2 > 3x$ και $x^2 > 4x - 4$

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$-x^2 + 2x < -3$, $x^2 - 2x - 15 < 0$ και $x - 2 > 0$.

20. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει :

i) $3 \leq x^2 - 2x \leq 8$,

ii) $4(x + 1) < x(x + 7) < 2(2x + 5)$

$$\text{iii)} \quad 2x^2 - 8x - 6 < (x-3)^2 < 3x^2 - 8x + 5.$$

21. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει :

$$\text{i)} \quad 3x + 2 < 2x^2 - x \leq 1,$$

$$\text{ii)} \quad 3x < x^2 \leq 6x - 9$$

$$\text{iii)} \quad x - 1 < x^2 \leq 6x - 9.$$

22. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο $x^2 - 14x + 50$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26

23. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} \quad x^2 - 5|x| + 6 > 0$$

$$\text{ii)} \quad (2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2 < 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - 6|x| + 8 > 0$$

24. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} \quad x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$$

$$\text{ii)} \quad x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - 6|x| + 8 > 0$$

$$\text{iv)} \quad x^2 - 7|x| + 6 < 0$$

$$\text{v)} \quad x^2 - 10|x| + 9 \geq 0$$

$$\text{vi)} \quad 2x^2 - 5|x| + 2 > 0$$

25. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} \quad |x^2 + 3x - 1| < 3$$

$$\text{ii)} \quad |x^2 - 2x - 9| > 6$$

$$\text{iii)} \quad |x^2 - 2x + 8| > 8$$

26. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} \quad |x-3| \geq 2|x+1|$$

$$\text{ii)} \quad 2|x+2| \geq |x+4|$$

$$\text{iii)} \quad |1-x| - 3|x+5| > 0$$

$$\text{iv)} \quad 2|x+3| - 3|x-3| \leq 0$$

27. i) Να κάνετε τον πίνακα προσήμων για το τριώνυμο $-x^2 + x + 2$

ii) Να λύσετε την ανίσωση : $|-x^2 + x + 2| \leq 1 - x(x+6)$

28. i) Να κάνετε τον πίνακα προσήμων για το τριώνυμο $x^2 + x - 6$

ii) Να λύσετε την ανίσωση : $|x^2 + x - 6| \leq x^2 - 3x + 2$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad |x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\text{ii)} \quad |x^2 - 3x| = 3x - x^2$$

30. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad |x^2 + 3x - 10| = x^2 + 3x - 10$$

$$\text{ii)} \quad |x^2 - x - 12| = -x^2 + x + 12$$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\text{i)} \quad (2x-3)^2 - 6|2x-3| + 5 \leq 0$$

$$\text{ii)} \quad (x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24 \geq 0$$

Απόδειξη ανισοτήτων

32. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\text{i)} \quad x^2 > x - 1,$$

$$\text{ii)} \quad x^2 + 2x - 4 < 3x(x-1)$$

$$\text{iii)} \quad (x-3)(x+3) > 2(2x-7)$$

$$\text{iv)} \quad 28 - (x+2)^2 > -2(x-3)(x+3).$$

33. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $(3x - y)^2 - 2(3x - y) + 2 > 0$,

ii) $-2(4x - 5y)^2 + 3(4x - 5y) - 3 < 0$

34. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i) $x^2 - 3xy + 3y^2 + 1 > 0$,

ii) $-2x^2 + 4xy - 3(y^2 + 1) < 0$

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 - (3\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

36. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 - \lambda x = \lambda + 3$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

38. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι θετικές για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$, με $x, y \neq 0$.

i) $A = x^2 - xy + y^2$

ii) $B = x^2 + xy + 2y^2$

39. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.

40. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι το τριώνυμο $f(x) = (a - \beta)(x - \alpha)(x - \beta) + (\beta - \gamma)(x - \beta)(x - \gamma) + (\alpha - \gamma)(x - \alpha)(x - \gamma)$ έχει δύο ρίζες.

Προσδιορισμός παραμέτρου

41. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες.

i) $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$

ii) $(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x = \lambda + 1, \lambda \neq -1$

42. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

43. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

44. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

45. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$ έχει ετερόσημες ρίζες.

46. Να βρείτε για ποια $\mu \in \mathbb{R}$ οι τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν διατηρούν σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

i) $x^2 + (2\mu - 1)x + (\mu - 1)(\mu + 1)$

ii) $-4x^2 + (\mu + 3)x - \mu$

iii) $(\mu + 5)x^2 + (\mu + 2)x + 1$

iv) $(\mu - 7)x^2 + (\mu - 4)x - 1$

47. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο : $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3$, με $\lambda \neq 0$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

48. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο : $(2\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, με $\lambda \neq 1$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
49. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο : $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$, με $\lambda \neq 1$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
50. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο : $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x - \lambda$, με $\lambda \neq 1$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
51. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο : $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda$, με $\lambda \neq 0$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
52. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $-x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 8 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
53. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $(\lambda - 6)x^2 + (\lambda - 3)x - 1 < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
54. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $(\mu - 2)x^2 - 2\mu x + 2\mu - 3 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
55. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $(\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)x - 2 < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
56. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
57. Αν $|\lambda| > \sqrt{3}$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $-4x^2 + 8x - \lambda^2 - 1$ είναι αρνητικές.
58. Αν $0 < \alpha < 3$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $x^2 - \alpha x + \alpha$ είναι θετικές.
59. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $\alpha x^2 - 2\alpha x + \beta$ είναι θετικές.
60. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 i) $x^2 - (\lambda + 1)x + (\lambda^2 - 1) = 0$ ii) $(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda = 0, \lambda \neq 1$
61. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (2\lambda^2 - 4\lambda)x + \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$ (1)
 i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τη διπλή ρίζα x_0 της εξίσωσης (1) ισχύει ότι $x_0 < 3$.
62. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 4\lambda = 0$ (1)
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :
 $x_1 \cdot x_2 > 2x_1 + 2x_2 - 6$

63. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 3)x + \lambda + 6 = 0$ (1)

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) ,να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :
 $x_1^2 + x_2^2 < 42$

64. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) ,να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :
 $x_1^2 + x_2^2 < -2(2x_1x_2 + 1)$

65. i)Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12$

- ii) Δίνεται η εξίσωση : $\lambda \left[x - \lambda + 5 - (\lambda + 1)^2 \right] = 2x - 6$.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $x_0 < 30$.

66. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ και τα ενδεχόμενα : $A = \{x \in \Omega / x^2 - 12x + 27 \geq 0\}$ και $B = \{x \in \Omega / x^2 - 11x + 30 \leq 0\}$.Να βρείτε τις πιθανότητες :

- i) $P(A)$
- ii) $P(B)$
- iii) $P(A \cap B)$
- iv) $P(A \cup B)$