

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

απόλυτες τιμές

ΔΑΡΑΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Λέγοντας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού a εννοούμε τον αριθμό a χωρίς το πρόσημό του. (Αυτός βέβαια είναι ένας απλοϊκός αλλά πρακτικός ορισμός). Η απόλυτη τιμή του a συμβολίζεται $|a|$ π.χ. $|-2| = 2$ και $|+5| = 5$

Ορισμός της απόλυτης τιμής του a

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

(η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός αν αυτός είναι θετικός ή 0, και ο αντίθετός του αν αυτός είναι αρνητικός)

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

- $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ (όλες οι απόλυτες τιμές είναι θετικές ή μηδέν)
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ (γιατί η $|a|$ είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς a και $-a$)
- $|a| = |-a|$ (οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή)
- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|x|^2 = x^2$

7. Αν $\theta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{cases} |x| = \theta & \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta \\ |x| = |a| & \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟ: Με την ιδιότητα αυτή λύνουμε εξισώσεις με απόλυτα αφού πρώτα τις φέρουμε στην μορφή $|x| = \theta$ ή $|x| = |a|$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1. Απόλυτη τιμή γινομένου

Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } |a\beta| &= |a| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |a\beta|^2 = (|a| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow |a\beta|^2 = |a|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (a\beta)^2 = a^2\beta^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Απόλυτη τιμή πηλίκου

Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \text{ με } \beta \neq 0$$

Απόδειξη Όμοια

3. Απόλυτη τιμή αθροίσματος

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

Επειδή οι $|\alpha + \beta|$ και $|\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha||\beta| \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha||\beta|, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα ισχύει μόνο, όταν $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$, δηλαδή όταν $\alpha\beta \geq 0$.

Παρατηρήσεις:

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους προσθετέους, π.χ. $|\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
Γενικότερα ισχύει: $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Απόλυτη τιμή διαφοράς

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Παρατήρηση : Η ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερους όρους:

$$1\alpha) |x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$

$$3\alpha) |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \dots |x_n|$$

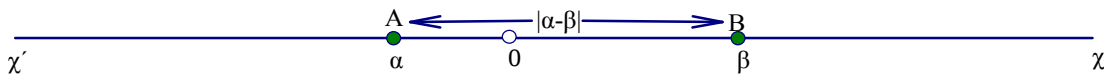
$$3\beta) |x^n| = |x|^n \quad (\text{απόλυτη τιμή δύναμης})$$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν οι αριθμοί α, β παριστάνονται στον άξονα $x'x$ με τα σημεία A, B αντίστοιχα τότε:

Απόσταση των αριθμών α, β λέγεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB

και συμβολίζεται $d(\alpha, \beta) = AB$



Αποδεικνύεται ότι η απόσταση των αριθμών α , β ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς

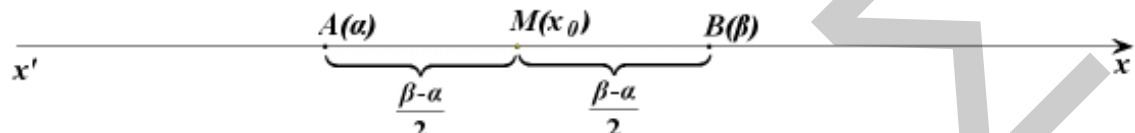
τους :

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$$

**ΜΕΣΟ (ΚΕΝΤΡΟ)
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ**

$$M(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Απόδειξη



Αν $M(x_0)$ είναι το μέσο του AB , έχουμε $(MA) = (MB) \Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta) \Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|$

Όμως $\alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow x_0 - \alpha > 0$ και $x_0 - \beta < 0$. Κατά συνέπεια ισοδύναμα έχουμε

$$x_0 - \alpha = \beta - x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

**ΑΚΤΙΝΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΟΣ**

$$\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

**Αριθμοί που απέχουν
από το x_0 , απόσταση
μικρότερη της ακτίνας**

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, τότε ισχύει

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \\ \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

**Αριθμοί που απέχουν
από το x_0 , απόσταση
μεγαλύτερη της ακτίνας**

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, τότε ισχύει

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \\ \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

Συνέπειες

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

και $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$ για $x_0 = 0$

1

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $|-a| = |a|$

β) $|a-2| = |2-a|$

γ) Αν $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

δ) Αν a, b ετερόσημοι τότε $|a^{2009}b^{2011}| = a^{2009}b^{2011}$

ε) Αν a, b ομόσημοι τότε $\left| -\frac{a}{b} \right| = -\frac{a}{b}$

2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b .

α) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a| + |b-1| \neq 0$;

β) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a-1| + |b| = 0$;

γ) Να βρείτε τις τιμές των a, b αν $|a-2| + |3-b| = 0$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των a, b αν $|a-5| \leq -|4-b|$.

ε) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a \cdot b| = -ab$;

3

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |\sqrt{3}-3| - |\pi-3|$

4

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |4x^2 - 4x + 1| \quad \text{και} \quad B = |x^6 - 6x^3 + 13|$$

5

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |-x^4 - x^2 - 3| \quad , \quad B = |-x^2 + 2x - 5|$$

6

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| 4 - \left| -x^2 + 2x - 1 \right| \right| - \left| x^2 + 4 \right| + 4x$

7

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| 2^{x+3} - 2^x \right| + \left| x + \left| x \right| \right| - \left| x \right| - x \quad x \in \mathbb{Z}$

8

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| x - 1 \right| + \left| x - 3 \right|$ όπου $1 < x < 3$

9

Δίνεται ότι: $\alpha < \beta < \gamma$.

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| \alpha - \beta \right| + \left| 2\gamma - 2\beta \right| - \left| \beta + \gamma - 2\alpha \right| + \left| \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \right|$

ΔΑΡΑΣ

10

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2 + x - |x - 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

11

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2x - |x - 2| + |x + 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

12

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Gamma = |-x^2 + 2x - 1| + |x^2 + x + |x||$ όπου $x \in \mathbb{R}$

13

Να απλοποιηθεί η $A = |x - 5| + |10 - 2x| - |x^2 - x|$ όπου $x: 0 < x < 3$

14

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| \frac{x^4 - 8x}{x - 2} \right| + \left| \frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3} \right|$ όπου $x: 0 < x \neq 2$

15

Να αποδείξετε ότι $|a - b| \leq |a - 5| + |b - 5|$

16

Να αποδείξετε ότι $|a - 3b|^2 + |3a + b|^2 = 10(|a|^2 + |b|^2)$

17

Να αποδείξετε ότι $|a + b| \leq |a + \gamma| + |\gamma - b|$

18

Αν $\beta \neq 0$ και ισχύει $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ να αποδείξετε ότι $a \geq 0$

19

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) Αν $a > 2$ τότε $|a - 1| = a - 1$

β) Δεν ισχύει πάντα $|a - \beta| = |\beta - a|$

γ) Αν $|a| \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$

δ) Αν $1 + x^2 \geq 2|x|$

ε) Η ισότητα $|x + y| = |x| + |y|$ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί

στ) Αν $|x| \leq 2$ τότε το x ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$

ζ) Αν $x < 1$ τότε $|x - 1| + |x - 2| - |x - 3| = -x$

η) $|-x| = \begin{cases} x, & \text{άν } x \leq 0 \\ -x, & \text{άν } x > 0 \end{cases}$

θ) Η εξίσωση $-3x = 3|x|$, με $x < 0$ είναι αόριστη.

ι) $|x| < |y| \Leftrightarrow x < y$

κ) $\left| \frac{2010}{2011} \right| > 2010 \left| \frac{1}{2011} \right|$

20 Να δείξετε την ισοδυναμία $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

21 Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $\left| \frac{6a}{9a^2 + 1} \right| \leq 1$

22 Αν $a \neq 0$ να δείξετε ότι : $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$

23 Αν $\left| \frac{a+4}{a+1} \right| = 2$ να δείξετε ότι $|a| = 2$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a+4}{a+1} \right| = 2 &\Leftrightarrow \frac{|a+4|}{|a+1|} = 2 \Leftrightarrow |a+4| = 2|a+1| \Leftrightarrow |a+4|^2 = 4|a+1|^2 \Leftrightarrow (a+4)^2 = 4(a+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 = 4(a^2 + 2a + 1) \Leftrightarrow 3a^2 = 12 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow |a|^2 = 4 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

24

Αν $|x|\psi + |x|\psi = 2|x\psi|$, με $x\psi \neq 0$, να δείξετε ότι ότι x , ψ είναι ομόσημοι

25

Αν $|a| + |\beta| < 1$ να δείξετε ότι $|a| < 1$ και $|\beta| < 1$

26

Να αποδείξετε ότι $|a\beta| - a\beta \geq a|\beta| - |a|\beta$

27

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha(\beta-1)(\gamma-2) \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta-1}{|\beta-1|} + \frac{\gamma-2}{|\gamma-2|} \leq 3$$

28

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με: $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha + \beta x| < |\alpha x + \beta|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) < 0$

β) $\alpha^2 + \beta^2 x^2 < \beta^2 + \alpha^2 x^2$

γ) $|x| < 1$

29

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha\beta \neq 0$ ισχύει ότι $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι ετερόσημοι.

30

Αν $|a + b| + |b + \gamma| + |a + \gamma| \geq 2ab\gamma \cdot (|a| + |\beta| + |\gamma|)$ (1), να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\gamma \leq 1$

31

Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|\psi| \leq 3$ (1), να αποδείξετε ότι

α) $|4x - 5\psi| \leq 19$ και β) $|3x - 2\psi + 7| < 2011$

32

Αν $-3 < x < 1$ και $-1 < \psi < 3$, να αποδείξετε ότι :

α) $|x + 1| + |\psi - 1| < 4$

β) $|x - 3| - |\psi - 2| < 100$

33

Αν $|a - 1| < 5$ και $|\beta - 2| < 3$ (1), να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών μεταβάλλεται η παράσταση (α) $\alpha + \beta$ και (β) $2\alpha - \beta + 17$

34**Να βρείτε το x από τις εξισώσεις**

(α) $|x| = 2$ (β) $|2x - 1| + 3 = 0$ (γ) $|x - 2| = 3$

35Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

$$(α) \quad |x-3| + |6-2x| = 12 \quad (β) \quad |2x-3| = |x-1| \quad (γ) \quad |2x-3| = |x-2| + |2x-4|$$

36Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

$$(α) \quad |x| \leq 1 \quad (β) \quad |x-1| \leq 3 \quad (γ) \quad |x-2| + |4-2x| < 6$$

37Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

$$(α) \quad |x| \geq 3 \quad (β) \quad |2x+1| \geq 4 \quad (γ) \quad |x-1| + |2-2x| > 9$$

38Να βρείτε τα x, ψ από την σχέση

$$|2x - \psi - 3| + |x + 2\psi - 4| = 0$$

39

Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 - x| + |x^2 - 1| \leq 0$

40

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, 2) = 3$

41

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, 2) = d(x, 3)$

42

Αν $d(a, 2\beta) > d(2a, \beta)$, να δείξετε ότι $|a| < |\beta|$

43

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, -1) \geq d(x, 2)$

44

Να βρείτε το x από την σχέση $|d(x^2, -1) + d(x, 2) - x^2| \leq 3$

45

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας ,στα μη γραμμοσκιασμένα κουτάκια όπως δείχνει η πρώτη γραμμή .

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ	ΑΠΟΣΤΑΣΗ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ ή ΕΝΩΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ
$ x-4 \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2,6]$
$ x+3 < 4$		
$ x-4 > 2$		
$ x+3 \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		$(-2,2)$
		$[-5,1]$
		$(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$
		$(-\infty,-5) \cup (1,+\infty)$

ΘΕΜΑΤΑ - ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ

46

Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε $2,37\text{dm}$. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ $0,005\text{dm}$. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε :

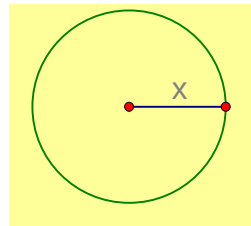
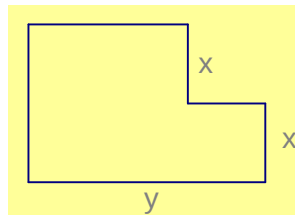
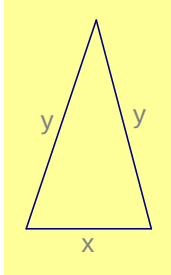
- Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης.
- Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή D .

47

Να αποδείξετε ότι $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$

Αν $|x-2| < 0,1$ και $|y-4| < 0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων :

48



49

Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -για απάντηση

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a .
Τι εκφράζει γεωμετρικά η απόλυτη τιμή ;
2. Να συμπληρώσετε με τα συμπεράσματα στις προτάσεις που ακολουθούν
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| = \theta$ τότε.....
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| \leq \theta$ τότε.....
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| > \theta$ τότε.....
 - Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x , συμβολίζεται με και είναι μη αριθμός.
 - Αν ισχύει $|a + b| = |a| + |b|$, τότε οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι
 - Η απόσταση δύο αριθμών a και b συμβολίζεται με και είναι ίση με
3. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι ισχύουν :
 - α) $|a|^2 = a^2$
 - β) $|ab| = |a| \cdot |b|$
 - γ) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι ισχύουν :
 - α) $|a + b| \leq |a| + |b|$
 - β) $|a - b| \leq |a| + |b|$
 Πότε ισχύει το ' $=$ ' σε κάθε περίπτωση ;
5. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι η κεντρική τιμή τους είναι ο αριθμός $x_0 = \frac{a + b}{2}$
6. Τι ονομάζουμε απόσταση δύο αριθμών πάνω στον άξονα ;
Να γράφεται την σχέση που την εκφράζει .
7. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).
 - α) $|-a| = |a|$
 - β) $|a - 3| = |-a - 3|$
 - γ) Αν $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$
 - δ) Αν a, b ετερόσημοι τότε $|a^3 b^5| = a^3 b^5$

ε) Αν α, β ομόσημοι τότε $|- \alpha \beta| = -\alpha \beta$

8. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $|-|\alpha\beta|| + \alpha\beta = 0$ τότε α, β ετερόσημοι

β) $|\alpha - 2| = |- \alpha + 2|$

γ) Αν $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

δ) Αν $|\alpha - 1| + |2 - \beta| = 0$ τότε $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

ε) Αν $d(x, 0) > 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

9. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, χ .

α) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha + 2| + |\beta - 1| \neq 0$;

β) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha - 1| + |\beta - 5| = 0$;

γ) Να βρείτε τις τιμές του χ αν $d(\chi, -2) < 3$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του χ αν $d(\chi - 1, 2) \geq 4$.

ε) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha \cdot \beta| + \alpha\beta = 0$;

10. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $|\alpha|^2 = |\alpha^2| = \alpha^2$

β) $|x - 3| = |3 - x|$

γ) $|3 + x^2| = \left| \frac{1}{3 + x^2} \right|$

δ) Η εξίσωση $|x - 3| + 4 = 0$ είναι αδύνατη

ε) $||x| + 3| = |x| + 3$

στ) Αν $\alpha + \beta = 0$ τότε $|\alpha| = |\beta|$

ζ) Η εξίσωση $|x - 3| = -1$ είναι αδύνατη

η) $||x|| = |x|$

θ) Αν $x \leq 5$, τότε $|x - 5| = 5 - x$

ι) $d(2x - 3, 4) = |2x - 7|$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος

1. Αν $\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

2. $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

3. $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$

4. i) $|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha < \beta$

ii) $\alpha < \beta \Rightarrow |\alpha| < |\beta|$

5. $|x-y| = |y-x|$
6. Αν $|a|+|b| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0$
7. $x+y=0 \Leftrightarrow |x| = |y|$
8. Αν $a < b < c < d$ τότε $|b-c| < |a-d|$
9. Ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R} : |x+y|+x+y \geq 0$
10. Ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq |x|+|y|$
11. Η ισότητα $|x+y| = |x|+|y|$ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί
12. Η απόσταση δύο αριθμών είναι η διαφορά τους
13. Αν $|x| \leq 2$ τότε το x ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$
14. Αν $x \in (-\infty, -5)$ ή $x \in (5, +\infty)$ τότε $|x| > 5$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

Απαντήστε σύντομα (ή με απόδειξη) στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Τι συμπεραίνετε για τους x, y αν i) $|x|+|y| \neq 0$; ii) $|x|+|y| = 0$;
- β) Τι προκύπτει για τους x, y αν $|x|+|y| \leq 0$;
- γ) Τι προκύπτει για τους x, y αν i) $|xy|=xy$; ii) $|xy|=-xy$;
- δ) Πότε ισχύει η ισότητα $|x+y| = |x| + |y|$;
- ε) Τι προκύπτει για τους a, b όταν $a|b| + b|a| = 0$;
- στ) Τι προκύπτει για τους a, b όταν $|a+b| = |a-b|$;
- ζ) Γιατί ισχύει $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- η) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |x-1|^2 + 3$;
- θ) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κλάσματος $\frac{x}{|x|}$;
- ι) Αν $x^2 = 9$, με τι ισούται η $|x|$;
- ια) Αν $x \in [-5, 5]$, πόσο είναι i) η ελάχιστη απόσταση του x από το 0; ii) η μέγιστη απόσταση;
- ιβ) Αν $1 \leq x \leq 3$, πόσο είναι η μέγιστη τιμή της απόστασης του x από τον αριθμό 2;
- ιγ) Αν $d(x, 2000) \leq 8$, σε ποιο διάστημα ανήκει ο x ;
- ιδ) Αν $|x-3| \geq 2$, ποιες τιμές παίρνει ο x ;
- ιε) Με δύο παραδείγματα δείξτε ότι δεν ισχύει η ισοδυναμία $|x| < |y| \Leftrightarrow x < y$
- ιστ) Αν $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $|x-1| < \varepsilon$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....για λύση

1. Να βρείτε τις τιμές των απολύτων

α) $|7|$

β) $|-5| + |-2|$

γ) $|\sqrt{2} - 1|$

δ) $|\sqrt{2} - 2|$

ε) $|3 - \pi|$

στ) $|2\sqrt{3} - 7|$

ζ) $|9 - \pi| + |1 - \pi|$

η) $|(-1)^{2011}| \cdot |2 - \pi| + |4 - \pi|$

θ) $|3 - |1 - 4||$

ι) $\left|1 - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{3} - 1\right|$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $|x^2 + 1|$

β) $|-x^2 + 4x - 4|$

γ) $||x^2 + 7| + 2010|$

δ) $|x^2 - 6x + 9|$

ε) $|-\alpha^2 - 3|$

στ) $||x^2 + 4| + 4x|$

3. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $|x^2 - 4x + 4| |x^2 + 4| + |x^4 + 2| - |x^4 + x^2 + 6| |-3 - x^{2010}| + |2x^{2010} + 1| - |3x^{2010} + 3|$

β) $|x^2 + 4| + |x^4 + 2| - |x^4 + x^2 + 6|$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = |9x^2 - 6x + 1|$

$B = |x^6 + 6x^3 + 17|$

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = |3^{x+3} - 3^x| + |x + |x|| - ||x| - x|$

$B = |7 - |-x^2 + 4x - 4|| - ||x^2 + 1| + 2x|$

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = |-x^4 - x^2 - 5|$

$B = |-x^2 + 2x - 7|$

7. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = |\beta - \alpha| + |2\gamma - 2\beta| - |\alpha + \beta - 2\gamma| + \left|\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right|$

$A = |2\alpha - 2\beta| + |3\gamma - 3\beta| - |\beta + \gamma - 2\alpha| + \left|\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right|$

8. Αν $x < 2$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = x + |x - 2|$

$B = 3x - |x - 2| + |3 - x|$

$\Gamma = |x - 2| + |2x - 4| - |x - 3| + |2x - 9|$

$\Delta = |2 - x| + |4 - 2x| - |2x - 6|$

9. Αν $0 \leq x \leq 1$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = -2x + |x - 1|$$

$$B = x - |x - 1| + |1 - x|$$

$$\Gamma = |x - 1| + |2 - 2x| - |x^2 - 1| + |2x - 6|$$

$$\Delta = |x^2 - x| + |2x^2 - 5| - |x^3 - 4|$$

10. Αν $x > 5$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = 2x + |x - 5|$$

$$B = x - |x - 5| + |5 - x|$$

$$\Gamma = |x - 5| + |x - 4| - |x - 3| + |2x - 4|$$

$$\Delta = |x^2 - 25| + |x^2 - 5x| - |2x - 3|$$

11. Αν $\alpha < 2 < \beta$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \alpha + |\alpha - 1| + |\beta - 2|$$

$$B = |2 - \alpha| + |2 - \beta| - |\alpha - 3|$$

$$\Gamma = |\beta - 1| + |\beta| - |\beta^2 - 4| + |\alpha + 2 - 2\beta|$$

$$\Delta = \left| \alpha - \frac{\beta + 2}{2} \right| + \left| \beta - \frac{\alpha + 2}{2} \right| - |2\beta - 4|$$

12. Αν $x < \psi < 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x + |2x| + |3\psi| + |x + \psi| - |x - \psi|$$

$$B = |x - 1| + |\psi - 2| - |x - 3|$$

$$\Gamma = |x^2 - \psi^2| - |x^2 - x\psi| + |\psi^2 - x\psi|$$

$$\Delta = |x^2 + x\psi| + |\psi^2 + x\psi|$$

13. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

i) $A = |x - 1| + |x^4 + 3x^2 + 17| - x + 5$

ii) $B = |x| + 4 - 2|x| + 3$ όπου $x > 1$

14. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

$$A = |x^2 - 6x + 9|$$

$$B = |-x^2 + 8x - 16|$$

$$\Gamma = |(x - 2)(x + 2) + 6|$$

15. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

$$A = \frac{|x|^3 + 2x^2}{|x| + 2}$$

$$B = \frac{|x|^3 + 5x^2}{2|x| + 10}$$

16. Αν $-2 < x < 3$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |x + 2| + |9 - 3x|$$

$$B = ||x + 2| - 5| - |2x - 6||$$

17. Αν $-4 < x < -1$ να δείξετε ότι παράσταση

$$A = |2x - 3| - |1 - 3x| + |-x| \text{ είναι ανεξάρτητη του } x$$

18. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = 2 + |x - 1|$$

$$B = 2x - 3 + |x + 2|$$

$$\Gamma = |x - 3| + |2x - 6| - |3 - x|$$

$$\Delta = 4x - |x - 2| - |4 - 2x|$$

19. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = x + |x-1| + |x-2|$$

$$B = 2|x+1| - |x+3|$$

$$\Gamma = |x-2| + |2x-6| - |x-3|$$

$$\Delta = x - |x-1| - |x^2 - x|$$

20. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \frac{x^2 + 3|x|}{|x| + 3}$$

$$B = \frac{x^2 - 6|x| + 5}{|x| - 1}$$

$$\Gamma = \frac{x^2 + 6|x| + 9}{|x| + 3}$$

$$\Delta = \frac{x^2 - 4}{|x| + 2}$$

21. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = |x^2 - 2x + 1| - |x^2 - x + |x|| \quad B = |x^2 + 4x + 4| - |x^2 + x + |x||$$

22. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{|2x-4|}{x-2} + \frac{|y-1|}{y-1} \quad \text{και} \quad B = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|y+1|}{y+1}$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών x και y .

23. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = |x-2| + |3-x| \quad B = |x| - |4-x| + |x-5|$$

24. Αν γνωρίζουμε ότι $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $a < \gamma$ και $\beta < \gamma$,να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|a-\gamma| - |\gamma-\beta| + |a-\beta|}{|\beta-a|}$$

25. Δίνεται η παράσταση $A = 2x + 3 + |x-1| + |x-2|$.Ν βρείτε για ποια x η παράσταση παίρνει σταθερή τιμή

26. Αφού εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις με απόλυτα ,στη συνέχεια να τα απαλείψετε :

$$A = x - 1 + d(x, 2)$$

$$B = x + d(x, -2) + d(x - 1, 2)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

27. Να δείξετε ότι $|5a + 3|a| = 3a + 5|a|$,για κάθε $a \in \mathbb{R}$

28. Αν ισχύει $|x| < 1$ και $|\psi| < 1$ να δείξετε ότι $\left| \frac{x+\psi}{1+x\psi} \right| < 1$

29. Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{x}{1+|x|} \right| + \frac{1}{1+|x|} = 2$

30. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\left| \frac{\alpha|\beta| + \beta|\alpha|}{\alpha\beta} \right| = 2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι

31. Δειξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει :

α) $\left| x + \frac{1}{x} \right| = \left| x \right| + \frac{1}{|x|}$ β) $|x| \leq \left| x + \frac{1}{x} \right|$

32. Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, να δείξετε ότι : $|\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|$

33. Να δειχθεί η $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Πότε ισχύει το =;

34. Αν $|x| > 1$, να δείξετε ότι : $\left| x + \frac{1}{x} \right| < |x| + 1$

35. Να δείξετε ότι για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς x, ψ ισχύει : $|x\psi| + x\psi + x|\psi| + |x|\psi \geq 0$

36. Δειξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $|\alpha|^3 + 1 \geq \alpha^2 + |\alpha|$

37. Αν $\alpha, \beta, x, \psi \in \mathbb{R}$ και $|x| > |\psi|$, να δείξετε την ισοδυναμία : $|\beta x + \alpha \psi| > |\beta \psi + \alpha x| \Leftrightarrow |x| > |\psi|$

38. Να δείξετε ότι : $|x - 2\psi|^2 + |2x + \psi|^2 = 5(|x|^2 + |\psi|^2)$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$

39. Αν $|a + 5| = |a| + 5$ να δείξετε ότι $a \geq 0$

40. Αν $|x|^3 + |x| \geq x^2 + 1$ να δείξετε ότι $x \leq -1$ ή $x \geq 1$

41. Αν $-2 < x < 2$ και $-3 < x < 3$ να δείξετε ότι $|x\psi| < 6$

42. Αν $|x| = 5$ και $|y| = 3$, να δείξετε ότι : i) $5 \leq |2x + 5y| \leq 25$ ii) $2 \leq |y - x| \leq 8$.

43. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 1$, να δείξετε ότι : i) $|4x + 3y| \leq 15$ ii) $|x - y + 10| \leq 14$.

44. Αν x και ψ ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|x - \psi| < 1 + |x\psi|$

45. Αν $|x| \leq 1, |y| \leq 2$. Να αποδείξετε ότι για την παράσταση $A = |3x - 2y - 5|$ ισχύει $A \leq 12$

46. Αν $-4 < x < 2$ και $-2 < \psi < 4$ να δείξετε ότι $|x+1| + |\psi-1| < 6$

47. Να δειχθεί ότι: $|x+y| + |x-y| = 2|x| + 2|y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

48. Να αποδείξετε ότι αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε: $|3x - y + 1| \leq 6$

49. Να αποδείξετε ότι : $4|ab| \leq (|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

50. Αν ισχύει ότι : $|\alpha - \beta| < 2$ και $|\beta - \gamma| < 3$ να δείξετε ότι : $|\beta - \gamma + 2| < 7$

51. Αν ισχύει ότι : $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 2$ να δείξετε ότι :

α) $a^2 < 1$ και $\beta^2 < 4$

β) $|a\beta + 2| > |2a + \beta|$

52. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|x| = 5$ (β) $|2x - 3| + 7 = 0$ (γ) $|x - 1| = 4$

53. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|2x - 5| = |x + 2|$ (β) $|2x - 3| = |x - 1|$ (γ) $\left| \frac{2x+3}{x-1} \right| = 1$

54. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

(α) $|x| \leq 2$ (β) $|x - 2| \leq 4$ (γ) $|x - 3| + |6 - 2x| < 12$

55. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

(α) $|2x| \geq 4$ (β) $|2x + 1| \geq 3$ (γ) $|x - 1| + |2 - 2x| > 6$

56. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

(α) $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \geq 1$ (β) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 1$ (γ) $\frac{|x-1|-2}{3} \leq 6$

57. Να βρείτε τα x, ψ από την σχέση $|x - \psi - 1| + |x + 3\psi - 5| = 0$

58. Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 + 2x| + |x^2 - 4| \leq 0$

59. Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 - 9| + |x^2 - 6x + 9| = 0$

60. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|x-2|+|4-2x|=9$ (β) $|2x-3|=|x-1|$ (γ) $|2x-3|=|x-3|+|2x-6|$

61. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $\left| \frac{5x}{|x|+3} \right| = 3$ (β) $|2|x|+1| = ||x|+3|$ (γ) $\frac{|x-3|-4}{5} = 2$

62. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|2x-4|=10-|x-2|$ (β) $|2|x|-3| = ||x|-1|$ (γ) $\frac{3|x-3|-|6-2x|}{3} = 2$

63. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,1)=4$ β) $d(x,-2)=3$ γ) $d(x-1,2)=5$

64. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,2)+d(2x,4)=6$ β) $d(3x,2)=d(x,1)$

65. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(d(x,-1),5)=4$ β) $d(d(x,2),-4)=6$ γ) $d(d(x,3),-d(2x,6))=12$

66. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,0)<3$ β) $d(x,2)\leq 3$ γ) $d(x-1,1)<4$

67. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,0)\geq 4$ β) $d(x,-3)\geq 2$ γ) $d(x+1,3)>4$

68. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,3)+d(2x,6)\leq 9$ β) $d(x,2)\geq d(x,-1)$ γ) $d(x-1,1)+d(x-2,\leq 4$

69. Να βρείτε τα x, ψ από τις σχέσεις

α) $d(x+1,\psi)+d(4,\psi^2)=0$ β) $d(x-2,-\psi)+d(2x+\psi,3)\leq 0$

70. Να δείξετε ότι $d(a,\beta)-d(3a,a)\leq d(a,-\beta)$

71. Να δείξετε ότι $d\left(\frac{a}{\beta},0\right)+d\left(\frac{\beta}{a},0\right)\geq 2$

72. Αν ισχύει $d(4a-\beta,a-2\beta)=d(2a,0)+d(2\beta,\beta)$ όπου $a,\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a, β είναι ετερόσημοι.

73. Αν ισχύει $d(x, -2) \leq 5$ και $d(\psi, 3) \leq 3$, να αποδείξετε ότι : $d(x+7, -\psi) \leq 16$

74. Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|\psi| \leq 2$, να αποδείξετε ότι :

α) $d(x, -\psi) \leq 3$ β) $d(x-2, \psi-2) \leq 3$ γ) $d(x+3, 2\psi) \leq 8$

75. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, στα μη γραμμοσκιασμένα κουτάκια όπως δείχνει η πρώτη γραμμή

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x+1 \leq 2$	$d(x, -1) \leq 2$	$[-3, 1]$
	$d(x, -1) \geq 3$	
$ x+1 > 5$		
$ x-2 \geq 6$		
	$d(x-2, 3) < 4$	
		$(-3, 3)$
		$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
	$d(x, 7) > 5$	
$ x-3 < 1$		
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$
		$[-2, 2]$
		$[-5, 1]$

76. Δίνεται η παράσταση $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x) = x$ όταν $|x| < 1$

β) $f(x) = \frac{1}{x}$ όταν $|x| > 1$

77. Αν $|x-2| < 3$ να απλοποιηθεί το κλάσμα $K = \frac{|5-x| - 2|x+1|}{|x-3| - 2}$

78. Αν α πραγματικός με $0 < \alpha < 1$ και $1-\alpha \leq x \leq 1+\alpha$, να απλοποιηθεί, η

$$\Pi = \left| \frac{x-1}{\alpha} + 1 \right| + \left| \frac{x}{1-\alpha} - 1 \right| - \frac{x}{\alpha(1-\alpha)}$$

79. Αν α, β πραγματικοί με $\alpha \neq 0$ και $1-\beta \leq \alpha^2 \leq 1+\beta$, να δείξετε ότι $\left| 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right| \leq \frac{\beta}{\alpha^2}$

80. Αν $|a+1| < 2$ και $|\beta-1| < 2$ να δείξετε ότι $|a+\beta| < 3$

81. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ και $x^2 + \psi^2 = 1$ να αποδείξετε ότι $|\alpha x + \beta \psi| \leq 1$

82. Να δείξετε ότι $\frac{(2a+1)^2}{|2a+1|} + \frac{(2a-1)^2}{|2a-1|} \geq 2$

83. Αν $|a+2| \leq 5$ και $|\beta-3| \leq 3$, να δείξετε ότι: $|\alpha + \beta + 7| \leq 16$

84. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{x^2 - 2|x|}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -2$

85. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 + |x|}{|x| + 1} + \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} - 2 \frac{x^2 - 4}{|x| + 2}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

86. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x-5}{2x-4}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A .

β) Να λύσετε την εξίσωση $|A| = 1$.

87. i. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $|a| < |\beta| \Leftrightarrow a^2 < \beta^2$.

ii. Αν $|a| \neq |\beta|$ και ισχύει $1 + |\alpha\beta| < |\alpha + \beta|$ να αποδείξετε ότι $|a| < 1 < |\beta|$ ή $|\beta| < 1 < |a|$.

iii. Αν $\alpha\beta \neq 0$ και ισχύει $|a + \beta| < |a - \beta|$ να αποδείξετε ότι:

α) α, β ετερόσημοι, β) $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$.

88. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι ανισότητες $|\alpha| < 1$, $|\beta - 1| < 10$ και $|\alpha - \gamma| < 10$ να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta - \gamma| < 20$.

89. i. Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| + |\beta| = 0$ τότε $\alpha = \beta = 0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x - 2| + |x - 3| = 0$, β) $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$

90. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = xy - x + 2y - 2$, $B = 3x - xy + 6 - 2y$, $\Gamma. 3x + 6$.

i. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|A| + |B| + |\Gamma|$.

iii. Για ποιά τιμή του x η παράσταση $|A| + |B| + |\Gamma|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a .
Τι εκφράζει γεωμετρικά η απόλυτη τιμή ;

Β. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, β να δείξετε ότι ισχύουν :

α) $|a\beta| = |a| \cdot |\beta|$

β) $|a - \beta| \leq |a| + |\beta|$

Γ. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $||-a\beta| - a\beta| = 0$ τότε a, β ομόσημοι

β) $|a - 3| = |-a + 3|$

γ) Αν $|a| = |\beta| \Leftrightarrow a^4 = \beta^4$

δ) Αν $|a-3| + |5-\beta| = 0$ τότε $a=1$ και $\beta=-5$

ε) Αν $d(x, 0) < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν $a < \beta < \gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A = |a - \beta| + |3\gamma - 3\beta| - |\gamma + \beta - 2a| + \left| \frac{a + \beta}{2} - \beta \right|$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

$$d(3x - 1, x) > 3 \quad \text{και} \quad |x - 2| \leq 5$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$

α) Για ποια x ορίζονται οι παραστάσεις A και B

β) Να δείξετε ότι $A = |x| - 3$ και $B = |x| + 2$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $A + B = 2d(x, 3) - 1$

δ) Να λυθεί η ανίσωση $2A < B$