

ΘΕΜΑ Β

1. Δίνονται οι παραστάσεις $K(x) = |x-2| - |3-x|$ και $\Lambda(x) = 1 - |x-3|$ και οι αριθμοί

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \text{ και } \beta = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{6}}.$$

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = 3$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις $\Lambda(x) = \alpha$ και $\Lambda(x) = -\beta - 1$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $K(x) = 0$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $K(x) = \Lambda(x)$.

2. Για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι: $\alpha^2 + \beta^2 = 4\beta - 4$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 2$.

ii) Αν $\alpha < x < \beta$ και $K = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3}$, να δείξετε ότι $K = 2$.

iii) Αν $\Lambda = \sqrt[3]{(\beta+1)\sqrt{27} \cdot \sqrt[4]{9}}$, να δείξετε ότι $\Lambda = 3$.

iv) Να λύστε την εξίσωση $\frac{\sqrt{y^2 + 4 - 4y}}{K} - \frac{5}{\Lambda} = \frac{|2-y|}{\Lambda}$.

3. Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί x και y .

i) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Θεωρούμε και τους αριθμούς $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ και $\gamma = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2$.

iii) Αν για τους παραπάνω αριθμούς x και y ισχύει $x \geq \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ και $y < \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, να βρείτε την τιμή της

$$\text{παράστασης } K = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2} + \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 1}}{y-1}.$$

4. Για τον αριθμό x ισχύει ότι: $x^2 + 3x - 10 < 0$.

- i) Να δείξετε ότι $x \in (-5, 2)$ και να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης $x^3 + 12 = 0$ είναι λύση της ανίσωσης.
- ii) Για τις παραπάνω τιμές του x να βρείτε τον αριθμό $k = |2x + 10| - 3|2 - x| + 5|x - 4|$.
- iii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{k+1}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt[4]{k+1}} \cdot \sqrt[3]{2}$.

5. Για τον αριθμό x ισχύει ότι: $x^2 < x$.

- i) Να δείξετε ότι $x \in (0, 1)$.
- ii) Για τις παραπάνω τιμές του x να βρείτε τον αριθμό $\mu = |x| + |x - 1| + 6$.
- iii) Αν $A = \frac{1}{3 - \sqrt{\mu}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{\mu}}$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \alpha x - 2 = 0$, (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii) Αν x_1, x_2 είναι οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x_1, -x_2 + 1) \leq 2$.
- iii) Αν $\alpha = \sqrt[5]{3^4 \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[10]{3}$, να δείξετε ότι $\alpha = 3$.
- iv) Αν x_1, x_2 είναι οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης (1) για $\alpha = 3$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $2x_1$ και $2x_2$.

7. Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$.

Έστω ακόμη οι παραστάσεις

- $A = (\sqrt{x + \alpha} - \sqrt{x - 1})(\sqrt{x + \alpha} + \sqrt{x - 1})$ και
- $B = \left(\frac{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[12]{\alpha^2}}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}}{5} \right)$

- iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και στη συνέχεια να δείξετε ότι $A = 4$.
- iv) Να αποδείξετε ότι $B = \sqrt[3]{2}$.

- v) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{B^3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{A}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

8. Δίνονται οι παραστάσεις $A = d(x, 4)$, $B = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$ και $\Gamma = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$.

- i) Να αποδείξετε ότι $B = 2$.
ii) Να αποδείξετε ότι $\Gamma = 8\sqrt{3}$.
iii) Να λύσετε την εξίσωση $2A = \sqrt{3} \cdot \Gamma$
iv) Να λύσετε την ανίσωση $B \leq A \leq \frac{\Gamma\sqrt{3}}{3}$.

9. Δίνονται οι παραστάσεις $A = d(x, -2) + |x - 2|$ και $B = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2^3 \cdot 3}$.

- i) Αν $|x| < 2$ αποδείξετε ότι $A = 4$.
ii) Να αποδείξετε ότι $B = \sqrt{6}$.
iii) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{6} \cdot \sqrt{y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}} = \frac{A}{B}$.
iv) Να λύσετε την ανίσωση $||2\omega - 1| - 3| < A$.

10. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την οποία και να βρείτε.
ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (Γ2) και για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύουν:

- $|\alpha - 2| < \lambda$.
- $|\beta - 3| \leq \lambda + 1$.
- $|2\gamma + 3| \leq \lambda$.

iii) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$, $1 \leq \beta \leq 5$ και $\gamma \in [-2, -1]$.

iv) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $3\alpha - 2\beta$ και $\frac{2\alpha}{\beta}$.

v) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\gamma^2 + \alpha^2$.

vi) Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών 2α και β .

11. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β .

- i) Να αποδείξετε ότι $2\alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha \geq -2\left(\alpha\beta + \frac{25}{2}\right)$.
- ii) Αν ισχύει $2\alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha = -2\left(\alpha\beta + \frac{25}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = 5$.
- iii) Να λύσετε τις ανισώσεις $-x^2 + \beta x - 6 < 0$ και $x^2 + \alpha \leq 11$.
- iv) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του προηγούμενου ερωτήματος.

12. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β , με $\alpha > \beta$, για τους οποίους ισχύουν

- $\alpha \cdot \beta = 8^{\frac{2}{3}}$.
- $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.
- ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β και στη συνέχεια να τους βρείτε.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $|x + \alpha - \beta| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

13. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- i) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- ii) Να βρείτε τις κοινές λύσεις της παραπάνω ανίσωσης με την ανίσωση $|2x - 1| \leq 3$.
- iii) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.
- iv) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = 2\left(\frac{98}{99}\right)^2 - 3\frac{98}{99} + 1$.

14. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 2$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$.
- ii) Να εξετάσετε ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης $x^5 - 16x = 0$ είναι λύσεις και της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.
- iii) Για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (i) να δείξετε ότι η παράσταση $K = |x - 2| + 2|x^2 - x - 2| - |x + 1| - 2x^2$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη του x .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 20$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια το σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.
- ii) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.
- iii) Αν $m = -\frac{556}{111}$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $k^2 + k - 20$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha - 2x + x^2}$, όπου $\alpha = (\sqrt{2014} - \sqrt{2015})^{2016} \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2015})^{2016}$.

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 6 - |2x - 2|$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 - f(x) = 2$.

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 10x + 24 - |\lambda| = 0$ (1) και ο αριθμός $x_1 = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να δείξετε ότι $x_1 = 5 - 2\sqrt{3}$.
- iii) Αν ο αριθμός x_1 είναι η μία ρίζα της εξίσωσης (1), να βρείτε την άλλη ρίζα της και τον αριθμό λ .

18. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ και $B = \sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{18}$.

- i) Να αποδείξετε ότι $A = 5 + \sqrt{6}$ και $B = 3\sqrt{2}$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x - B^2| = A - \sqrt{6}$.
- iii) Να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = A - \sqrt{6}$ και $x_2 = \sqrt{2} \cdot B$.

19. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 6$ και $x_1 x_2 = 4$

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -12$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ και $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.
- iii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $K = x_1^2 x_2 - 2x_1 + x_1 x_2^2 - 2x_2$.

20. Η εξίσωση $x^2 - \kappa x + \lambda + 1 = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ και x_2 η μεγαλύτερη ρίζα της

εξίσωσης $|x + \sqrt{2}| = 1$

- i) Να αποδείξετε ότι $x_1 = \sqrt{2} + 1$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = -2$.
- iii) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2 .

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

- i) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f σε μορφή διαστήματος.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(3) \cdot x^2 + f(-1) \cdot |x| + 8 = f(4)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι $f(2) = g(2)$.

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(11)$.
- iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το σημείο $M\left(\frac{\mu}{4}, 1\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$ η f γράφεται $f(x) = |x| - 2$.
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = f(2)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii) Να αποδείξετε ότι οι τιμές $f(5)$, $f(9)$ και $f(13)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

25. Δίνονται οι αριθμοί $x-1$, x^2-x και $4x-2$, όπου $x \in \mathbb{N}$, οι οποίοι με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- i) Να δείξετε ότι $x=3$ και να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.
- ii) Αν το x^2-x είναι ο $5^{\text{ος}}$ όρος αυτής της αριθμητικής προόδου να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και στη συνέχεια τον $11^{\text{ο}}$ όρο της α_{11} .
- iii) Να βρείτε ποίος όρος της προόδου είναι ίσος με 82 .
- iv) Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου είναι μικρότεροι από 43 .
- v) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων.

26. Δίνονται οι αριθμοί x^2+5 , x^2+x και $2x+4$, όπου $x \in \mathbb{N}$, οι οποίοι με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- i) Να δείξετε ότι $x=3$ και να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.
- ii) Αν το x^2+5 είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος αυτής της αριθμητικής προόδου να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 .
- iii) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \dots + \alpha_{24}$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha_{15} \cdot x^2 + \alpha_{16} \cdot x^2 + \dots + \alpha_{24} \cdot x^2 \leq 170$.

27. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθίσματα η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη.

- i) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.
- ii) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά.
- iii) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο.

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + \beta^2 - 4 = 0$ (1), όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 , x_2 για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$.
- ii) Να δείξετε ότι $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

iv) Αν ισχύει $x_1^2 + 9 = 2x_2$, x_2 να βρείτε τον αριθμό β .

29. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο με $\alpha_3 = 1$ και $\omega = -3\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

i) Να δείξετε ότι $\omega = -3$ και $\alpha_1 = 7$.

ii) Να βρείτε τον 21° όρο της προόδου και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με -83 .

iv) Να βρείτε πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα ίσο με -65 .

30. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_v) με $\alpha_4 = 43$ και $\alpha_8 = 27$.

i) Να δείξετε ότι $\omega = -4$ και $\alpha_1 = 55$ και να βρείτε το γενικό της όρο α_v .

ii) Να βρείτε πόσους θετικούς όρους έχει η (α_v) .

iii) Να βρείτε τους όρους της προόδου για τους οποίους ισχύει $d(\alpha_v, 5) \leq 6$.

31. Δίνεται η ακολουθία (α_v) με γενικό όρο $\alpha_v = 2v - 11$.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -9$.

ii) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{16} + \dots + \alpha_{21}$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου (α_v) .

32. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_v) με $\alpha_4 + \alpha_{12} = \mu - 6$ και $\alpha_7 + \alpha_{19} = \mu - \mu^2$, όπου

$$\mu = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}.$$

i) Να δείξετε ότι $\mu = 6$.

ii) Να δείξετε ότι $\omega = -3$ και $\alpha_1 = 21$.

iii) Να βρείτε τον όρο α_v για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha_v = v$.

33. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |\sqrt{15} - 4| + |3 - \sqrt{15}| + \sqrt[5]{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$ και $B = 5 + 8 + 11 + \dots + 155$.

- i) Να δείξετε ότι $A = 3$.
- ii) Να δείξετε ότι $B = 4080$.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $|1 - 2y| \leq A$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $(x^7 + B \cdot x) \cdot (x^3 - 64) = 3 - A$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 6| + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1, 5)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
- ii) Να αποδείξετε ότι αν $x \geq 2$, $f(x) = 3x - 4$ και στη συνέχεια ότι $\frac{9x^2 - 16}{f(x)} = 3x + 4$.
- iii) Να αποδείξετε ότι αν $x < 2$, $f(x) = 8 - 3x$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$.
- ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $K = [f(5) - f(3)] \cdot [f(5) + f(3)] \cdot f(f(625))$.
- iii) Να αποδείξετε ότι $f(x^2) + \frac{1}{f(x^2)} \geq 2$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Να αποδείξετε ότι $[2f(-1) + 3f(0)] \cdot \sqrt{3} - 5\sqrt{6} = f(1)$.
- iii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{2}{f(0)}$ και $x_2 = \sqrt{8} + f(1)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{f(5)} - [f(2)]^2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(3x) = -f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(0) + f(-1) + f(1) + f(-x) = x$.

38. Δίνονται οι ευθείες $f(x) = (\mu^2 - 4\mu)x + 2$ και $g(x) = -|3\kappa + 1|x + 2015$.

i) Αν η ευθεία $f(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ να δείξετε ότι $\mu = 2$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

iii) Να βρείτε το εμβαδό που σχηματίζει η ευθεία $f(x)$ με τους άξονες.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x - \sqrt{x-2}$, για την οποία ισχύει ότι $f(11) - f(6) = 14$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

ii) Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x) - 3x}$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 4\alpha x - 3\beta$, για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha) + f(\beta) = -9$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = 3$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\|2x - 3\| - f(0) + 2f(5) = 0$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(0) + 6x$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = x^2 - 29$.

41. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $f(x) = (\alpha^2 + \beta^2)x - 1$ και $g(x) = [2(\alpha\beta + \beta) - 1 - \beta^2]x - 2014$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

ii) Να βρείτε το εμβαδό που σχηματίζει η f με τους άξονες.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(3x) = -f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

iv) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε η C_g να διέρχεται από το σημείο $(\mu, -2013)$.

42. Δίνονται οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $x = \sqrt[3]{8 \cdot 4^2}$ και $|y-3| < 2$, οι παραστάσεις:

- $A = \frac{x}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}-2}$.
- $B = |y-1| + |y-5| + \sqrt{x}$.

και η εξίσωση $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$, που έχει ρίζα τον αριθμό 5.

- Να δείξετε ότι $x = 4$ και $1 < y < 5$.
- Να δείξετε ότι $A = -2$ και $B = 6$.
- Να δείξετε ότι $\Gamma = 20$.
- Να λύσετε την εξίσωση $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση $A(3\omega-2)^2 + B|2-3\omega| + \Gamma = 0$.

43. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\lambda + 2)x + \mu^3 + 1$, το οποίο έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 3.

- Να δείξετε ότι $\lambda = 4$ και $\mu = 2$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $|4-2x| - \sqrt{f(x) + 2x - 5} < 2$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $(2x-1)^2 + 5\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = f(0)$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $x^4 - 5f(2)x^2 + [f(0) - 9]x + f(1) < 0$.

44. Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \sqrt{3^4 \cdot 3 \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^5} \cdot 4 \sqrt{\frac{1}{3^5}}}$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.
- Αν οι εξισώσεις $x^3 + 9\alpha = 0$ (1) και $\frac{3\beta^3}{8} \cdot x^2 - 1 = 0$ (2) έχουν κοινή λύση, να δείξετε ότι $\beta = \frac{2}{3}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση (2).
- Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = 0$.

45. Δίνονται οι αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει $\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1} \leq 3$ και $d(-\beta, -5) \leq 3$

- Να δείξετε ότι $-2 \leq \alpha \leq 4$ και $2 \leq \beta \leq 8$.

ii) Να δείξετε ότι $-64 \leq -\frac{2\beta^2}{\alpha-6} \leq -1$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left|x + \frac{1}{x}\right| = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16}$.

Αν επιπλέον για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \leq 4\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - 5$

iv) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

v) Να λύσετε την εξίσωση $|y + \beta| \cdot |\alpha y - 1| = 3|1 - y|$.

46. Δίνεται η εξίσωση $(x + A)^2 + (3y + B)^2 + (2z - \Gamma)^2 = 0$, όπου:

- Ο αριθμός A είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $\frac{|u-1|}{2} - 1 = \frac{|1-u|}{3}$.

- Ο αριθμός B είναι η μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης $3 < 2\omega - 1 \leq 19$.

- Και ο αριθμός $\Gamma = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}}$

i) Να δείξετε ότι $A = 7$.

ii) Να δείξετε ότι $B = 3$.

iii) Να δείξετε ότι $\Gamma = 6$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $(x + A)^2 + (3y + B)^2 + (2z - \Gamma)^2 = 0$.

v) Να κατασκευάσετε όλες τις εξισώσεις $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τα A και Γ .

47. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε επίσης τα ενδεχόμενα: $A = \{x \in \Omega / |2x - 1| \leq 3\}$, $B = \{x \in \Omega / x^2 - 6x \leq -8\}$ και

$\Gamma = \{x \in \Omega / (x - 2)^2 \geq 7 - 2x\}$.

i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$.

ii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B .

iii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα B και Γ .

iv) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το Γ .

48. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε επίσης τα

ενδεχόμενα: $A = \{x \in \Omega / (x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0\}$, $B = \{x \in \Omega / |2x - 1| \leq |x + 3|\}$ και

$\Gamma = \{x \in \Omega / x^2 - 7|x| + 10 > 0\}$.

- i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$.
- ii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B .
- iii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα B και Γ .
- iv) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το Γ .

49. Δίνεται ο δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- $A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 + 4x + \lambda = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}\}$
- $B = \{\mu \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 + \mu x + 2\mu - 3 = 0 \text{ έχει πραγματικές ρίζες}\}$

50. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-5, -4, \dots, -1\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = |\lambda - 3|x + \mu^2 - 1$ και $(\varepsilon_2): y = |3\lambda + 7|x + 1$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- $A = \{\lambda \in \Omega / \text{οι ευθείες } \varepsilon_1 \text{ και } \varepsilon_2 \text{ είναι παράλληλες}\}.$
- $B = \{\mu \in \Omega / \text{η ευθεία } \varepsilon_1 \text{ διέρχεται από την αρχή των αξόνων}\}.$
- $\Gamma = \left\{ \lambda \in \Omega / \text{το εμβαδό που σχηματίζει η ευθεία } \varepsilon_2 \text{ με τους άξονες είναι ίσο με } \frac{1}{2} \right\}.$
- $\Delta = \{\lambda \in \Omega / \text{η } \varepsilon_2 \text{ διέρχεται από το σημείο } (1, -\lambda)\}$

51. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 2.
- ii) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .
- iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1 + x_2 > x_1 \cdot 2x_2$.

52. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.
- iii) Για $\lambda = 1$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

53. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- ii) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, $\alpha \neq 0$, η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 2$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

54. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$.
- iii) Για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $K = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

55. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Αν το άθροισμα των ριζών είναι τριπλάσιο από το γινόμενο τους, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.
- iii) Για $\lambda = -2$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2 .

56. Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να γράψετε την εξίσωση (1) στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
- ii) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη του x .

57. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \gamma = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της. Αν ισχύει οι αριθμοί x_1, x_2 είναι ετερόσημοι και $|x_1 \cdot x_2| = 2x_1 + 2x_2$,

- i) Να αποδείξετε ότι $\gamma = -4$.
- ii) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha = (1 + x_1)^{2015} \cdot (1 + x_2)^{2015}$.

iii) Να υπολογίσετε την παράσταση $K = (\alpha x_1 + 2)(\alpha x_2 + 2)$.

iv) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{\alpha}{x_1}$ και $\frac{\alpha}{x_2}$.

58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 3$.

iii) Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ και $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = d(x, -B)$.

59. Δίνονται τα σημεία **A**, **B** και **M** που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

i) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει $\frac{AM}{2} + \frac{|2x - 10|}{3} = 8 - \frac{|5 - x|}{6}$.

Αν ακόμη ισχύει ότι $|x - 5| = |x - 9|$

iii) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου **M** αναγνωρίζετε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iv) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο **M**. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

60. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ και $\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις K και Λ .

ii) Να δείξετε ότι για τις επιτρεπόμενες τιμές του x , οι παραστάσεις γράφονται: $K = \sqrt{2} \cdot |x - 1|$ και $\Lambda = \sqrt[3]{3} \cdot (x - 1)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $K - |\Lambda| = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3}$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $x - \frac{\sqrt[3]{9} \cdot |\Lambda| - \sqrt{2} \cdot K}{2} = 0$.

61. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 5)x + \lambda^2 - 20 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$

i) Να δείξετε ότι $\lambda = 4$.

ii) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x .

iii) Αν $\mu \in (-2015, 1)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mu^2 + 3|\mu| - 4$.

62. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες αντίστροφες, να δείξετε ότι $\lambda = -2$.

iii) Για $\lambda = -2$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3$.

iv) Για $\lambda = -2$, να λύσετε την εξίσωση $y^4 - 3y^2 + 30 = x_1^2 + x_2^2$.

63. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , με $\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4} = 2$.

i) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$.

Αν το γινόμενο των τριων πρώτων όρων είναι ίσο με 2^{18} .

ii) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = 128$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $x + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_8 \cdot x \leq 10\alpha_3 - \alpha_2 \cdot x^2$.

64. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει ότι ο αριθμητικός μέσος των α_4 και α_{19} είναι 45.

i) Να δείξετε ότι $S_{22} = 990$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι το άθροισμα των πρώτων 21 όρων της (α_n) είναι 903,

ii) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$.

iii) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \dots + \alpha_{24}$.

Δίνεται ακόμη η γεωμετρική πρόοδος (β_n) με $\beta_1 = \frac{\omega}{36}$ και $\lambda = \alpha_1$.

iv) Να βρείτε το γινόμενο των πρώτων 6 όρων της (β_n) .

65. Δυο αριθμοί έχουν αριθμητικό μέσο 5 και γεωμετρικό μέσο 4.

i) Να δείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι το 2 και το 8.

Αν οι παραπάνω αριθμοί είναι ο $5^{\text{ος}}$ και ο $9^{\text{ος}}$ όρος μια αριθμητικής προόδου (α_n) ,

ii) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = -4$ και $\omega = \frac{3}{2}$.

iii) Να βρείτε για ποιον όρο της (α_n) ισχύει $\alpha_n = n$.

iv) Να βρείτε πόσοι πρώτοι όροι της (α_n) έχουν άθροισμα 205.

v) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{23}$.

66. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \frac{|\lambda|}{4} = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μια ρίζα διπλή.

ii) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.

iii) Αν ισχύει $\lambda^2 + 7P - \frac{1}{S} = 0$, όπου P το γινόμενο των ριζών της (1) και S το άθροισμά τους, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{5}, 8)$, να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

iii) Για $k = 2$ να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \gamma^3 + 2$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -6 .

i) Να δείξετε ότι $\gamma = -2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(x^2) = 1 - x$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = |x + 2|$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 1) < 0$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 4|$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(x + 2)$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq f(f(0))$

iv) Να γράψετε τη συνάρτηση f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να αποδείξετε ότι $f(0) - \frac{9}{\sqrt{10} + 1} = 1$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $(x-5) \cdot [f(x)]^2 = 100$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \lambda x - 3, & x \geq 4 \\ \mu x + 3, & x < 4 \end{cases}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(4, -1)$ και $B(-1, 4)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\mu = -1$.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iv) λύσετε την ανίσωση $x^2 + f(0) \cdot x \leq f(3) - f(f(-7))$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x^2 - x + 1| - 2|x^2 + 2| + 1$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $(x-5)^2 + f^2(x) = 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) - 8 = 0$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(2x) - 3f(2) = -5$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - x^2| = 2|x-1| - 3$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > x - 4f(1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

v) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2} - \sqrt{f(2)}} + \frac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2} + \sqrt{f(2)}} = 4$.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^4 - x^2 - 12}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $y'y$.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{f(x)} \geq 60$.

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x+4} - \sqrt{2x+16}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii) Να βρείτε τα σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.
- iii) Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(8, 6 - 4\sqrt{2})$.
- iv) Να αποδείξετε ότι $f(17) + f(6) = \sqrt{2}$.

76. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \lambda x - 2\mu$ και $g(x) = \mu x^2 + x + \lambda + 5$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και η C_g διέρχεται από το σημείο $A(-2, 2)$

- i) Να δείξετε ότι $\lambda = 3$ και $\mu = -1$.
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iv) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .
- v) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha^2 + 2\alpha)x^2 + (6\beta - 22)x + \beta^2 - 5$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο η $A(-1, 6)$, τότε:

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 3$.
- ii) Να βρείτε τα σημείο τομής της C_f με τους άξονες.
- iii) Να βρείτε τα σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y = -2x + 4$.

78. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- ii) Για τις παραπάνω τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε αυτές για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 x_2 + 3)^2 = 0$.
- iv) Για $\lambda > 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες αρνητικές.

79. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ αν η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και $\lambda < 0$, να εξετάσετε αν οι ρίζες είναι θετικές ή αρνητικές.
- iv) Να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq x_1 x_2$.
- v) Να αποδείξετε ότι $\frac{x_1 + x_2}{2} > 1$.

80. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ οι ρίζες της (1) είναι αντίστροφες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και $\lambda > 0$, να εξετάσετε αν οι ρίζες είναι θετικές ή αρνητικές.
- iv) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών x_1, x_2 είναι μικρότερος ή ίσος από τον γεωμετρικό.

81. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- ii) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης (1).

- iii) Να αποδείξετε ότι για $\lambda > 2$ οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι θετικές και στη συνέχεια ότι $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

82. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda - 5, \lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

- ii) Αν ισχύει $x_1^2 \cdot x_2 - x_1 + x_1 \cdot x_2^2 - x_2 = -15$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

- iii) Για $\lambda = 3$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2 .

- iv) Για $\lambda = 1$, να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \left[\left(\frac{88}{21} \right)^2 - 3 \cdot \frac{88}{21} - 4 \right] \cdot \left[\left(-\frac{999}{998} \right)^2 + 3 \cdot \frac{999}{998} - 4 \right] (\mu^2 - 3|\mu| - 4), \text{ όπου } \mu \in (-4, 4).$$

83. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5, \lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι ίση με $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$ και να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

- ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ρίζες να είναι αντίθετες. Στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, οι ρίζες είναι θετικές.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

- iii) Να δείξετε ότι $f(x_1 - 1) \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot f(x_2 + 1) < 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- iv) Αν $d(x_1, x_2)$ η απόσταση των ριζών στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$.

84. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, (1) όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , με $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

- i) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.
- iii) Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο ερώτημα (i) η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

85. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 7$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και $7 < \lambda < 16$ να αποδείξετε ότι οι ρίζες είναι ομόσημες. Ποιο είναι το πρόσημο των ριζών τότε;
- iii) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$ (2) έχει 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
- iv) Έχει η εξίσωση (2) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

86. Δίνεται η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, (1) όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- i) Αν $\gamma < 0$ να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 4\gamma > 0$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση (1) έχει 2 πραγματικές ρίζες.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + x^2 - 20 = 0$.
- iii) Αν $\gamma > 0$, $\beta < 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει 4 πραγματικές ρίζες.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

87. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2(m-4)x + 36 = 0$, (1) όπου $m \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $m \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $m \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $m \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $x^2 + 2(m-4)x + 36 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv) Να αποδείξετε ότι αν $m = -\sqrt{3} - \sqrt{5}$ η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες.
- v) Αν x_1, x_2 είναι οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του $m \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x_1 + x_2| \leq x_1 \cdot x_2$.

88. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- ii) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζες αντίθετες.

- iii) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 16$.
- iv) Για τις τιμές του λ του ερωτήματος (ii) να λύσετε την ανίσωση $y^2 + y + 3 \leq \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1} + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4}$.

89. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 2(2x-\lambda)$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα να λύσετε την εξίσωση $(y-1)^2 - (\lambda+1) \cdot |y-1| + \lambda = 0$.
- ii) Αν η εξίσωση (1) είναι αδύνατη να λύσετε την ανίσωση $|x|(|x|+4) - 2(|x|+4) \leq 0$.
- iii) Αν η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση x_0 , να βρείτε για ποιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x_0| = \frac{1}{2}$.

90. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda+1)x + \lambda = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ρίζες είναι αντίθετες και για ποια αντίστροφες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να αποδείξετε ότι $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq -x_1 - x_2$.
- iv) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 + x_2$.

91. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda+3) = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το άθροισμα των ριζών είναι κατά 12 μικρότερο από το γινόμενο.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και $\lambda = -4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.
- iv) Για $\lambda = -4$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $x_1^2 x_2$ και $x_1 x_2^2$.

92. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2(\lambda-2)x + \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό 1, να δείξετε ότι ο λ είναι άρρητος.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- iii) Αν $\lambda = 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες και να τις βρείτε.
- iv) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της (1) να αποδείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 \geq 2$.
- v) Για την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, που η παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της, να λύσετε την εξίσωση (1).

93. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2\alpha x + \alpha(\alpha + 4) = 0$, (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της (1) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ είναι ανεξάρτητη του α .
- iii) Να αποδείξετε ότι $(x_1 + x_2 - 2)^2 + 2x_1x_2 \geq -4$.
- iv) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{1}{4 - x_1 - x_2} + 1 = \frac{7}{x_1x_2}$.

94. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (3 - \alpha)x - \alpha - 5 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ρίζες είναι αντίθετες και για ποια αντίστροφες.
- iii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (x_1 + 8)^2 + (x_2 + 8)^2 - (x_1x_2 - 1)^2$ είναι ανεξάρτητη του α .
- iv) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης (1) δεν μπορεί να γίνει μικρότερο του 15.
- v) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\frac{x_1 - 1}{x_1} + \frac{x_2 - 1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + 6$.

95. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda + 3) = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι για $\lambda = 5$ η εξίσωση (1) έχει μια ρίζα διπλή.
- ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα.
- iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.
- iv) Αν ισχύουν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ και $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) δεν έχει ρίζες.

96. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16$.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, το τριώνυμο έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.
- iii) Να βρείτε όλες τις τιμές α , για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.
- iv) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου να αποδείξετε ότι $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$.

97. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- ii) Αν ισχύει $\lambda > 0$, να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές και αντίστροφες.
- iii) Αν ισχύει $0 < \lambda \neq 1$, και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

98. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- ii) Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα.
- iii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

99. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x + 1$ και $h(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο και να βρείτε.
- ii) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 1$ τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν δυο κοινά σημεία.
- iii) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha < 1$ τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h δεν έχουν κοινά σημεία.

100. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

- i) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ .
- ii) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$, να απλοποιήσετε τον τύπο της g .
- iii) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$, να αποδείξετε ότι $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$, όταν $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

101. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Για $\alpha = 1$ να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.
- iii) Για $\alpha > 1$ να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

102. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1,

- iii) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν έχουν άλλο σημείο τομής.
- iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δεν είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

103. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + 1 - \lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.
- iii) Αν επιπλέον $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = d(x_1, -x_2) + 2$.

104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
- ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}}}\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και στη συνέχεια να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4^{-\frac{1}{2}}$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(2x - 1)$.
- v) Να λύσετε την εξίσωση $2f^2(x) + 3 = 5f(x)$.

105. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - (\lambda - 2\mu)x + \lambda - 1$ και $g(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{f(x)} - 2}$. Αν ισχύει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{2}$.
- Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{5}{4}$ και $\mu = \frac{1}{8}$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = f(1) + 2$.
 - Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{(2x-1)^2}{|2x-1|-2}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με την ευθεία $y = 1$.
106. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x^3 - 2x^2 + |\alpha|x - 6|}{x^2 + 3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 3$ ή $\alpha = -3$.
 - Να δείξετε ότι $f(x) = |x - 2|$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2 = (x - 2)^2$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x - 2$.
107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1 - 3\alpha\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\alpha + \beta, 0)$.
- Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 - Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 3$, να κατασκευάσετε όλες τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού που έχουν ρίζες τις $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$.

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
- ii) Για $\lambda = 0$, να αποδείξετε ότι $\frac{3f(1) - 2\sqrt{2}}{f(1) - \sqrt{2}} - \sqrt{6} = 5$.
- iii) Για $\lambda = -1$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $x + f(0)$, $2x - 1$, $x - f(0)$, δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- iv) Για $\lambda = -1$, να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 1) > 2f(x)$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$, για την οποία ισχύει ότι οι αριθμοί $f(0)$, $f(-2)$ και $f(-3)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- ii) Αν επιπλέον ο αριθμός $f(0)$ είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος της γεωμετρικής προόδου (α_n) , να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και στη συνέχεια τον πρώτο όρο της που είναι μεγαλύτερος του 512.
- iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 8$.
- iv) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 5$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

110. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \frac{1}{4}} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + 3x + \mu^2.$$

- i) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ και $P(A - B)$, όπου A και B τα ενδεχόμενα:
 - $A = \{\alpha \in \Omega / \text{η } f(x) \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}\}$.
 - $B = \{\mu \in \Omega / \text{η } g(x) \text{ τέμνει τον άξονα } y' y \text{ σε σημείο με θετική τεταγμένη}\}$.

Αν επιπλέον, $\mu > 0$, η g διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ και οι αριθμοί μ , 3α , $g(1)$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου:

- ii) Να δείξετε ότι $\alpha = \mu = 1$.
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

- iv) Να λύσετε την εξίσωση : $|g(x) - 5| + |x^2 - 2f(0)| = P(\emptyset)$.
- v) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της γεωμετρικής προόδου (α_n) με $\alpha_1 = f(0)$ και $\lambda = -2g(-1)$.
- vi) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Gamma = \{v \in \Omega / \alpha_v < 2\}$.

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x - 7$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε επίσης τα ενδεχόμενα $A = \{\lambda \in \Omega / f(-1) < -12\}$ και $B = \{\lambda \in \Omega / f(1) > -\lambda^2\}$.

- i) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cap B)$.

Αν επιπλέον οι αριθμοί $f(2)$, $f(6)$, $f(8)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,

- ii) Να δείξετε ότι $\lambda = -2$.
- iii) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f(x-1) \leq -3$.

112. Δίνεται η εξίσωση $-x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 + 2 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή των α και β .
- ii) Αν $2x_1 + 2x_2 = x_1 \cdot x_2 - 2$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 0$.
- iii) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} + \frac{x_2 + 1}{x_2 + 2}$ είναι ίση με $\sqrt{2\alpha} \cdot (\alpha - 1)^{2014}$.

Θεωρούμε επιπλέον την εξίσωση $x^2 - (\Delta + A)x + S - 1 = 0$, όπου Δ η διακρίνουσά της, S το άθροισμα των ριζών της και A η τιμή της παραπάνω παράστασης.

- iv) Αν η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες να την λύσετε.

113. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + \lambda^2 - 2\lambda + 7$ και $g(x) = -x^2 - 2x - \sqrt[3]{\lambda} + 16$. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6, τότε:

- i) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.
- ii) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iii) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- v) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| + |g(x)| - \left(\frac{g(0)}{3}\right)^2 = f(f(1)) - 25$.

Θεωρούμε επιπλέον την αριθμητική πρόοδο με $\alpha_6 = 3f(f(6)) - 1$ και $\alpha_{11} = g(f(2))$.

- vi) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = 55$ και $\omega = -4$.
- vii) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με $g(2)$.
- viii) Να βρείτε το άθροισμα των θετικών όρων της προόδου.
- ix) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{19}$.

114. Έστω A και B δυο απλά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει ότι:

$$4(P(A))^2 + 9(P(B))^2 + 2 \leq 4P(A) + 6P(B).$$

- i) Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.
- ii) Αν επιπλέον ισχύει $P(B-A) = \frac{6^{20} \cdot 9^6}{8^7 \cdot 27^{11}}$, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B.
- iii) Αν $N(A) = \alpha_{2014}$, όπου α_{2014} ο 2014^{ος} όρος αριθμητικής προόδου με δεύτερο όρο $\alpha_2 = -3998$ και διαφορά $\omega = 2$, να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

115. Θεωρούμε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) και τις ευθείες για τις οποίες ισχύουν:

- $(\varepsilon_1): y = (\alpha_7 + 5)x + \alpha_{12} - \alpha_{14}$ και
 - $(\varepsilon_2): y = (15 - \alpha_{15})x$
 - Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και η (ε_1) διέρχεται από το σημείο $(3, 2)$.
- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = -15$ και $\omega = 2$.
 - ii) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε_1) με τους άξονες.

- iii) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ τα σημεία της ευθείας (ε_1) με τετμημένες $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το άθροισμα των τεταγμένων των παραπάνω σημείων.

116. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- ii) Να απλοποιήσετε την συνάρτηση $h(x) = \left[\frac{1}{f(x)} \right]^2 \cdot \frac{1}{(4-x)^2}$, $x \in (2, 4)$.

- iii) Αν $h(x) = \frac{x-2}{4-x}$ να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \sqrt{h\left(\frac{7}{2}\right)} - 2$ και $x_2 = \frac{1}{\sqrt{h\left(\frac{7}{2}\right)} - 2}$.

- iv) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha = \sqrt[4]{h\left(\frac{10}{3}\right)^3} \sqrt[3]{h\left(\frac{10}{3}\right)} \sqrt{\left(h\left(\frac{10}{3}\right)\right)^7} \cdot \sqrt[8]{8}$ και στη συνέχεια να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{3\sqrt{\alpha} + 2}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

117. Οι αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι με τη σειρά που δίνονται οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ταυτόχρονα, οι α, β, γ αποτελούν – με την ίδια σειρά – τον 1° , τον 3° και τον 6° όρο μιας αριθμητικής προόδου.

- i) Αν ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου και λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι $\omega = \frac{\alpha}{4}$ και $\lambda = \frac{3}{2}$.
- ii) Αν το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι **211**, πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε να πάρουμε άθροισμα **340**;
- iii) Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου βρίσκονται μεταξύ του 5^{ou} και του 6^{ou} όρου της γεωμετρικής προόδου;

118. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $\lambda > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$. Δίνεται επίσης η αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 3f(0)$, για την οποία ισχύει $S_{51} - S_{50} = 134$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\lambda = 2$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- iii) Να δείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = -16$.
- iv) Αν $x \in (\alpha_6, \alpha_7)$ να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- v) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = f(\sqrt{x^2+1}-x)$.

119. Έστω μια αριθμητική πρόοδος (α_n) και μια γεωμετρική πρόοδος (β_n) . Οι δυο πρόοδοι έχουν **ακέραιους** όρους και ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = 155$.
- $\beta_1 + \beta_2 = 9$.
- Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου (β_n) είναι ίσος με α_1 και η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι ίση με β_1 .

- i) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = \lambda = 2$ και $\beta_1 = \omega = 3$.
- ii) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών α_{11} και β_5 .
- iii) Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ και β_2 .
- iv) Να λύσετε την ανίσωση: $(\beta_1 x)^2 + (\beta_2 x)^2 + (\beta_3 x)^2 + \dots + (\beta_{10} x)^2 \leq \beta_1 x + \beta_3 x + \beta_5 x + \dots + \beta_{19} x$.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \kappa^2 - 2\kappa + 2$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $M(\alpha - \beta, 5\alpha)$, όπου α, β αριθμοί για τους οποίους ισχύει $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$.

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \frac{1}{5}$ και στη συνέχεια ότι $\kappa = 1$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(2x) - 3f(2) = -5$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - x^2| = 2|x-1| - 3$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $|x + f(f(0))| \cdot |x-2| = |4x-8|$.
- v) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 - 4x + f(2) + 1} = f(-1)$.
- vi) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2x - f(1)$.
- vii) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με 13.
- viii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- ix) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την γραφική παράσταση της $g(x) = 4x + 7$.

x) Αν η ευθεία $h(x) = cx + d$ είναι παράλληλη στην ευθεία g και διέρχεται από το σημείο $(f(0), 2018)$, να βρείτε τους αριθμούς c, d .

xi) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2}-\sqrt{f(2)}} + \frac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2}+\sqrt{f(2)}} = 4$.

Έστω επιπλέον x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $g\left(\frac{3}{4}\right)x^2 - g\left(\frac{1}{4}\right)x + 1 = 0$ και A, B τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού

χώρου Ω , με : $P(A) = x_1 + x_2$, $P(B) = x_1 \cdot x_2$ και $P(A \cap B) = x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

xii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$.

xiii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A και όχι το B.

xiv) Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.