

ΘΕΜΑ 61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Ναδειχθεί ότι για κάθε $y \in f(A) = \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ως προς x μοναδική λύση.

β) Να βρεθεί πραγματική συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$e^{g(x)} + e^{x \ln x} g(x) = x \ln x e^{x \ln x} + e^{x \ln x}, x > 0.$$

γ) Να λυθούν στο $\mathbb{R}$,

i) η εξίσωση: $f(2x^4 + 4) + \ln(2x^4 + 4) = f(x^2 + 4) + \ln(x^2 + 4)$ (I).

ii) η ανίσωση: $f(2x^2 + 2) + \ln(2x^2 + 2) > f(x^2 + 4) + \ln(x^2 + 4)$ (II).