

Θέμα 65

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^{-x} - 3x^3 - 1$ και $f(x) = \eta\mu g(x) - e^{-x} + 3x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το $g^{-1}\left(\frac{1}{e} - 4\right)$.
2. Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της g .
3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{f(x)} + 3^{f(x)} - 5}{3^{f(x)} + 5^{f(x)}}$.
5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g^2(x_0) + 4g(x_0) = 5 - 5x_0$ (μονάδες 5). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) > 0$.