

ΘΕΜΑ 66

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x}{x-2}$, $x \neq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $(f \circ f)(x) = x$

για κάθε $x \neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \neq 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x+1)) + f(x+1) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} + 1$

δ) Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(2, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x)) + g(x) = e^x$ για κάθε $x > 2$. Να δείξετε ότι:

i. η g αντιστρέφεται.

ii. $g^{-1}(x) = 2 \ln x - \ln(x-2)$