

ΘΕΜΑ 67

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $g(g(x)) > f(f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την ανίσωση: $f(x^2) + f(x^4) > f(x) + f(x^3)$.