

ΘΕΜΑ 70

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -x^2 + x + 2$.

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

β) Έστω $x_0 > 0$ λύση της προηγούμενης εξίσωσης. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\eta\mu x + x^2 - x - 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{x+1}{g(x) - g(x_0)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x_0 - x)^2 (1 - x_0 - x)^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

δ) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln f(x)}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ g)(x) = g(x)$.

στ) Δίνεται συνάρτηση h συνεχής στο $[0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$h(f(\xi)) = h(\sin \xi).$$

ζ) Έστω συναρτήσεις a, b συνεχείς στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $b(x) = g(x)a(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $a(x) = 0$ έχει διαδοχικές ρίζες το 2 και το -1, να αποδείξετε ότι $b(2)b(-1) \geq 0$.