

Θέμα 04

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της με $f(0) = e^2$, $f(1) = e^4$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x) > 0$,
- ii. $g(x) = \ln f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστον σημείο $M_0(x_0, 3)$ με $x_0 \in (0, 1)$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$.

γ. Αν επί πλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $f'(x_1) = 2 \cdot f(x_2)$.