

Θέμα 05

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

- α. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) + f(-x) = 2x^2$ για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$.
- β. Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = 1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -a} f(x)$.
- γ. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.
- δ. Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση $g(x) = x^2 + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, επαληθεύει την αρχική συνθήκη.