

Θέμα 06

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$ και $f(3) = 2$.

Αν ισχύει $f(f(x)+1) \cdot f(f(x)) = f(f(x)+3) \cdot f(f(x)+2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- α. υπάρχει $x_0 \in (1,3)$, τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 1$,
- β. $f(1) \cdot f(2) = f(3) \cdot f(4)$,
- γ. i. υπάρχει $x_1 \in [1,2]$ τέτοιο, ώστε: $f^2(x_1) = f(1) \cdot f(2)$,
ii. υπάρχει $x_2 \in [3,4]$ τέτοιο, ώστε: $f^2(x_2) = f(3) \cdot f(4)$,
- δ. η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.