

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \eta x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - \sqrt{x+2}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - e^{\sqrt{x+2}})$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^2+1} < |x| - x^2$

στ) Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) - \sqrt{2} \leq g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2}{\sqrt{x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x) - 3| - 1}{x + \sqrt{x}}$