

Θέμα 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x|x|$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

γ) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{f(x)} + f^{-1}(x) - 2}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\eta\mu x)}{x^3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{x}$

δ) Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν $h(x) = (g \circ f)(x)$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι $(f^{-1} \circ g)(x) = (g \circ f^{-1})(x)$, $x > 0$.

ε) Αν για τη συνάρτηση φ ισχύει ότι: $f(x) + 4x \leq \varphi(x) \leq 3f(x) + 2$, για κάθε $x > -3$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - 5}{x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|\varphi(x) - 1| - 4}{\sqrt{x + 3} - 2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\varphi(x) + 4} - 3}{\sqrt{2\varphi(x) - 6} - 2}$