

ΘΕΜΑ 17

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+\lambda}{x-1}$, $x \neq 1$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 1$.

Έστω $\lambda = 0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε γραφικά το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(x-1)\ln x - x = 0$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq 1$.

στ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $g : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ για την οποία να ισχύει ότι $(g \circ g)(x) = f(x)$ για κάθε $x > 1$.

ζ) Να βρείτε συνάρτηση $h : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $h(f(x)) = 1 - x$ για κάθε $x > 1$.

η) Να βρείτε σημείο της C_f που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, του οποίου το γινόμενο των αποστάσεων από τους άξονες ισούται με 4.

θ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση φ ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ για την οποία να ισχύει $\varphi(f(x)) + \varphi(2-x) = x$ για κάθε $x \neq 1$.

ι) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f^2(x) - 3f(x) + 1)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x) - 1)\eta\mu x]$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu^2 f(x) - f^2(x)}$