ΘΕΜΑ 20

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=-x^2+x+2$.

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

β) Έστω $x_0>0$ λύση της προηγούμενης εξίσωσης. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x+x^2-x-2}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{x+1}{g(x)-g(x_0)}$

iii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x_0-x)^2(1-x_0-x)^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

δ) Να υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln f(x)}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ g)(x)=g(x)$.

στ) Δίνεται συνάρτηση h συνεχής στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε:

$h(f(\xi))=h(\sigma\upsilon\nu\xi)$.

ζ) Έστω συναρτήσεις a,b συνεχείς στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $b(x)=g(x)a(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $a(x)=0$ έχει διαδοχικές ρίζες το 2 και το - 1, να αποδείξετε ότι $b(2)b(-1)\geq0$.