

ΘΕΜΑ 21

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^6(x) + x^{18} = 2[x^3 f(x)]^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x^3$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα. Να γίνει γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x) - \eta \mu^3 x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{f(x)}{x-1}} - x \right)$

ε) Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $xg(x) > x^3$ για κάθε $x \neq 0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.