

ΘΕΜΑ 23

Έστω συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = e^x + x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(f^{-1}(x) - x) - \ln(2^x + 5^x)]$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)}{x - e^{f(x)}}$, αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.