

ΘΕΜΑ 24

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Η f αντιστρέφεται.

β) Η εξίσωση υπάρχει μοναδικός $\rho \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$2f(\xi) = f(10^{-10}) + f(10^{-10^{10}}).$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[f(2)]^x + [f(3)]^x}{[f(3)]^x - [f(4)]^x}.$

στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.