

ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{10} - 3$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0^2 - 2$.