

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, για κάθε

$x, y > 0$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(\kappa - \lambda) = \frac{f^{-1}(\kappa)}{f^{-1}(\lambda)}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{-x}) + f(2) = f\left(\frac{x^3 + 2x + 2}{3}\right) + f(3)$.

δ) Έστω ότι επιπλέον για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(x) + \ln y = f(y) + \ln x$ για κάθε $x, y > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 1}{f^2(x) - \ln x + 2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x+1) - f(x^2 + x + 1))$$