

ΘΕΜΑ 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $e^{x_0} = \alpha - x_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 2^x}{f(x) - x + 3^x} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{f(x) - e^x} - \sqrt{f(x) - e^x}}{x - 1}$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 1) + f(x^4 - 1) > f(x - 1) + f(x^3 - 1)$.