

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$e^{f(x)} + f(x) = xe^x + \ln x + x \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + x$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\beta - \alpha} < 1$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει

$$\ln x_0 = \alpha - x_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$