

ΘΕΜΑ 31

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0, +\infty\}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν η f είναι 1-1, να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x^{1821})}{f(2)} = \frac{f(x)}{f(2x)}$.

Έστω ότι για την f επιπλέον ισχύει ότι $\frac{f(x)}{e^y} = \frac{e^x}{f(y)}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{f(4x) - f(x)}{f(3x) + f(2x)}$.