

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $(f^{-1} \circ f^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)$.

ε) Έστω $g(x) = 1 - \ln x$.

i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $(f^{-1} \circ g)(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $1 < a < e - 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1 - \ln a}{1 - \ln(a+1)} > \frac{\ln a}{\ln(a+1)}$.