

ΘΕΜΑ 33

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) + f(-x)) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Έστω ότι $2f(x) + f(-x) = x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^3 + x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x)) > 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) \ln \frac{1}{f(t)} dt$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x - 2}$