

ΘΕΜΑ 35

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει ότι:
 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ε) Αν $f(1) > 0$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(3^x) + f(2 \cdot 4^x) > f(4^x) + f(5^x)$.