

ΘΕΜΑ 36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(x) > 0$

ii. $\ln x + x < e + 1$

iii. $\ln f(x) + f(x) > e + 1$

γ) Δίνεται συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$g(x) + e^{g(x)} - 1 = f(x) \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να δείξετε ότι } g(x) = \ln x, x > 0$$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 2\rho - \rho^2$.