

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x < 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(f(x)) - 2}{x - 2}$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f^3(x_0) + f^2(x_0) + 3f(x_0) = x_0^3 + x_0$$