

ΘΕΜΑ 39

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$x^2 f'(x) + 1 = x^2 \ln^2 x - 2xf(x) \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(e) = \frac{e-1}{e}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$.

β) Να βρείτε στο $[1, +\infty)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x \ln x - 1 = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(\ln x) + e^{-2} < \frac{1}{\ln x} + 2$, $x > 1$.

δ) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt[\alpha\beta]{e^{\beta-\alpha}}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha < \beta$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{x \ln^2 x - xf(x) - 2x - 1}{\ln x - 2}$.