

ΘΕΜΑ 41

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + \eta\mu^2 x = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x}$.

γ) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της.