

ΘΕΜΑ 42

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$ και $2\ln(x-1) + 10(x-1)^3 \leq (x-1)f(x) \leq 8x^2 - 14x + 6$ για κάθε $x \in (0,1)$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \ln x - 4$, $x \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)-4}$ τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda+4} = e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0,1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.