

### ΘΕΜΑ 43

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**γ)** Να δείξετε ότι η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  στο διάστημα  $(e, +\infty)$ .

**δ)** Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

**ii.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**iii.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$